PROFE ESPECIALISTA

COLECCIÓN PARA EL PROFESOR QUE DOMINA SU DISCIPLINA

Jesús Adrián Moreno Barrera

Secundaria 3

RETOS MATEMÁTICOS 3

sm

Dirección de contenidos y servicios educativos
Elisa Bonilla Rius

Gerencia de publicaciones escolares
Felipe Ricardo Valdez González

Autor
Jesús Adrián Moreno Barrera

Elaboración de evaluaciones de opción múltiple
Valentina Muñoz Porras

Coordinación editorial y edición
Ernesto Manuel Espinosa Asuar

Asistencia editorial
José Cruz García Zagal, Jesús Rodríguez Viorato
León Felipe Villalobos Sánchez, Cristobal Bravo Marván

Revisión técnica de evaluaciones de opción múltiple
Instituto de Evaluación y Asesoramiento Educativo (IDEA)
Cristobal Bravo Marván

Coordinación de corrección
Abdel López Cruz

Corrección
Eduardo Jiménez Zurita
Laura Martínez García
Mónica Terán Méndez

Dirección de arte y diseño
Quetzatl León Calixto

Diseño de portada
José Manuel Calvillo

Diseño de la serie
Claudia Adriana García Villaseñor

Coordinación de diagramación
Jesús Arana Trejo, César Leyva Acosta

Diagramación
Maricarmen Martínez Muñoz

Coordinación de iconografía e imagen
Ricardo Tapia

Iconografía
Alejandra Amador, Abril García Mercado
Ilia Muñoz

Fotografía
© 2013, Carlos A. Vargas
© Thinkstock, 2013
© Archivo SM, 2013
© Latin Stock, 2013
© Other Images, 2013

Digitalización e imagen
Carlos A. López

Producción
Carlos Olvera, Víctor Canto, Lilia Alarcón

Retos matemáticos 3
Secundaria tercer grado
Primera edición, 2014
Primera edición revisada, 2016

Magdalena 211, Colonia del Valle,
03100, México, D. F.
Tel.: (55) 1087 8400
www.ediciones-sm.com.mx

ISBN 978-607-24-1001-5

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria
Editorial Mexicana
Registro número 2830

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Retos Matemáticos 3 se desarrolló para apoyar y acompañar al estudiante en su trabajo escolar mediante planteamientos didácticos cercanos a su vida cotidiana, en los que se relacionan de manera dosificada los conocimientos previos con los nuevos, conforme al grado de complejidad matemática. Su propósito es generar reflexiones y argumentos para que el alumno desarrolle competencias matemáticas, habilidades de comunicación y una actitud crítica ante su entorno.

Para ello, el libro se organiza en cinco bloques y cada uno de ellos en varias lecciones. Éstas, a su vez, se dividen en tres apartados: situación problemática, "Un paso adelante" y "Profundiza", que están diseñados para analizar, discutir, reflexionar y establecer de forma colectiva conclusiones relativas a los contenidos tratados. Al término de cada lección se encuentra un recuadro de tecnologías de la información y comunicación (TIC), donde se sugieren sitios de internet para que el estudiante practique al interactuar con animaciones, juegos, videos y modelos matemáticos. Todas las direcciones se verificaron entre el 10 y el 20 de noviembre de 2013.

Cada bloque concluye con cuatro anexos cuyo objetivo es sistematizar, resumir y ampliar los temas vistos. En la "Bitácora" hay planteamientos que permiten consolidar el conocimiento al resaltar las ideas relevantes de cada lección, así como verificar el nivel de adquisición de éste y detectar dificultades. Por otra parte, en el "Laboratorio de matemáticas" se presentan actividades relacionadas con el contenido de las lecciones; en ellas es necesario aplicar lo aprendido para resolver los diversos planteamientos.

En cuanto al anexo "En el tintero", incluye un problema que representa la posibilidad de explorar nuevos escenarios, técnicas y procedimientos con el fin de afianzar lo estudiado. Por otro lado, en la "Evaluación" se reúnen preguntas con el formato de opción múltiple para determinar los avances del alumno y se ofrece una evaluación tipo PISA con la que se evalúan las competencias matemáticas, así como una autoevaluación para el bimestre. Al final se ofrece un glosario y la bibliografía se presenta tanto para el estudiante como para el profesor: en el primero se definen ciertos términos que podrían generar confusión, mientras que en la segunda se recomiendan documentos impresos y digitales para ampliar los conocimientos.

Por último, esta obra se diseñó como una guía para los profesores y padres de familia, pues el índice se adecuó para mostrar cada bloque con un color específico e identificar el eje, tema y contenido correspondientes, así como la lección y semana de estudio, además de una columna para indicar el avance del trabajo escolar. También se incluyó una dosificación de contenidos que sirve como guía del avance en las lecciones.

El autor

Para el alumno

Las matemáticas han contribuido al desarrollo del conocimiento científico y al avance de la tecnología, pero también han influido en otros ámbitos de la actividad humana, como el arte, la arquitectura y la música. Sin embargo, otra de sus funciones es ayudar a tomar buenas decisiones; por ejemplo, al calcular el volumen de diversos cuerpos, estudiar el cambio en las variables que intervienen en algún fenómeno para hacer predicciones, elegir el procedimiento para resolver un problema e interpretar los datos vertidos en una gráfica, entre otras situaciones.

Esto significa que las matemáticas son útiles en la vida cotidiana. Al estudiarlas debemos emplear nuestras habilidades de razonamiento para solucionar problemáticas en diversas situaciones. Pero, así como el ejercicio físico frecuente nos sirve para mantener una buena salud, practicar y dedicarse a resolver actividades de matemáticas nos ayuda a fortalecer nuestro pensamiento.

Por estas razones, en tu libro encontrarás problemas con diferente grado de complejidad en los que aplicarás conocimientos y repasarás conceptos. Asimismo, hallarás actividades en las que necesitarás reflexionar lo ya aprendido y explorar procedimientos o métodos de solución nuevos. Además de profundizar en los contenidos, de manera individual y grupal, indagarás otras rutas para resolver problemas en los **retos matemáticos**, consolidarás habilidades, técnicas y formalizarás tus ideas y argumentos.

Tu libro está estructurado en lecciones que se inician con un planteamiento; éste relaciona el conocimiento matemático que se explicará con situaciones de la vida cotidiana. Deberás poner en práctica tu experiencia y tus conocimientos para responder las preguntas. Conforme avances, te darás cuenta de que hay varias maneras de resolver los problemas. Al terminar cada lección, encontrarás referencias en internet para profundizar en los contenidos que estudiaste, así como para explorar y resolver otros **retos matemáticos**.

En las lecciones encontrarás actividades para trabajar en equipo o parejas; están diseñadas con la intención de que experimentes los beneficios del trabajo colectivo, por ejemplo, al compartir ideas, llegar a acuerdos, etcétera, pero también con el fin de que desarrolles habilidades para comunicar información matemática.

El libro fue creado para que fortalezcas tus habilidades de pensamiento matemático y tu autoconfianza al superar los **retos matemáticos** que se presentan y aprovechar este amplio campo del saber. Espero que lo disfrutes.

El autor

Para el profesor

En este libro se asume que la construcción de conocimiento es un proceso en que la repetición y memorización son útiles, mas no suficientes, para desarrollar y fortalecer las competencias matemáticas de los alumnos. Por esta razón, el contenido se basa en situaciones que integran una secuencia para contextualizar el conocimiento y darle sentido, lo cual ocasiona que las matemáticas sean más cercanas a la realidad de los estudiantes y que se propicie un medio para facilitar el tránsito del lenguaje cotidiano al matemático. De este modo, no sólo ampliarán sus conocimientos, sino que comprenderán y usarán con eficiencia los procedimientos y argumentos matemáticos al resolver problemas en diversas situaciones.

El libro se escribió con la intención de apoyarlo en la construcción del conocimiento matemático de sus estudiantes. Su característica principal es presentar los contenidos mediante secuencias didácticas con las que se profundiza en el manejo de los conceptos a medida que se avanza en cada lección. Las situaciones propuestas también se han diseñado con esta perspectiva: involucran planteamientos que es posible usar en la vida cotidiana y refieren a actividades laborales y profesionales más cercanas a la realidad de los estudiantes.

Además, el enfoque de las lecciones se basa, por un lado, en el carácter funcional del conocimiento matemático, en el desarrollo y perfeccionamiento de técnicas y procedimientos, así como en el manejo y la comunicación de la información matemática. Y por el otro, se apoya en el fortalecimiento del pensamiento matemático que conduce a la buena toma de decisiones y al razonamiento a partir de la interpretación de datos.

El planteamiento del libro le ofrece actividades individuales, en que los estudiantes efectúan trabajo autónomo y actividades en pareja o en equipo, así como actividades colectivas de cierre y debates grupales. En todas, su guía es importante para coordinar el trabajo, afianzar las ideas y formular conclusiones.

Las lecciones están conformadas por una actividad inicial con la que se introduce el contenido, se plantean cuestionamientos iniciales y se lleva a los estudiantes a reflexiones intuitivas; en el apartado **Un paso adelante** se aplican los conocimientos con mayor profundidad, con énfasis en los conceptos clave; la sección **Profundiza**, en que se plantean problemas más complejos, pero sin dejar de acompañar a los alumnos en el proceso resolutivo; la cápsula **Oriéntate**, en que se agregan datos útiles para apoyar la solución de problemas. En cada contenido del programa presentamos un reto final que los alumnos pueden resolver en casa, ya sea de forma individual o en equipo; y finalmente, el recuadro de **TIC**, que integra enlaces a diversas páginas de internet con más ejercicios e información adicional sobre los conceptos tratados. Todos los enlaces se verificaron entre el 10 y el 20 de noviembre de 2013. Antes del índice se presenta una dosificación que sirve como guía para el avance en el trabajo con las lecciones de cada contenido.

Espero que encuentre en el libro un apoyo para el óptimo desarrollo de sus clases.

El autor

Retos matemáticos 3 consta de cinco bloques que contienen lecciones de cuatro páginas en que desarrollarás los contenidos de esta asignatura. En tu libro encontrarás las siguientes secciones.

Introducción. Es un texto breve en que se mencionan situaciones cotidianas o especializadas, relacionadas con las ideas principales que se estudiarán, con el fin de contextualizarlas y de activar tus conocimientos previos. También aparece una imagen relacionada con lo que se describe.

Número de bloque

Aprendizajes esperados. Son los conocimientos y las habilidades que alcanzarás como resultado del estudio de los contenidos.

Lección. Número y título de la lección estudiada.

Eje, tema y contenido.

Situación

Título de la primera situación problemática.

Un paso adelante

La lección es una secuencia que se inicia con una situación cotidiana relacionada con las matemáticas. Una vez que la resuelves, das un paso adelante al aplicar nuevos conocimientos y habilidades para solucionar problemas matemáticos.

Para la bitácora

Referencia a ejercicios de autoevaluación de los temas vistos en el bloque.

Profundiza

Sección que contiene problemas matemáticos más complejos que puedes resolver porque ya desarrollaste los conocimientos y las habilidades necesarias para ello.

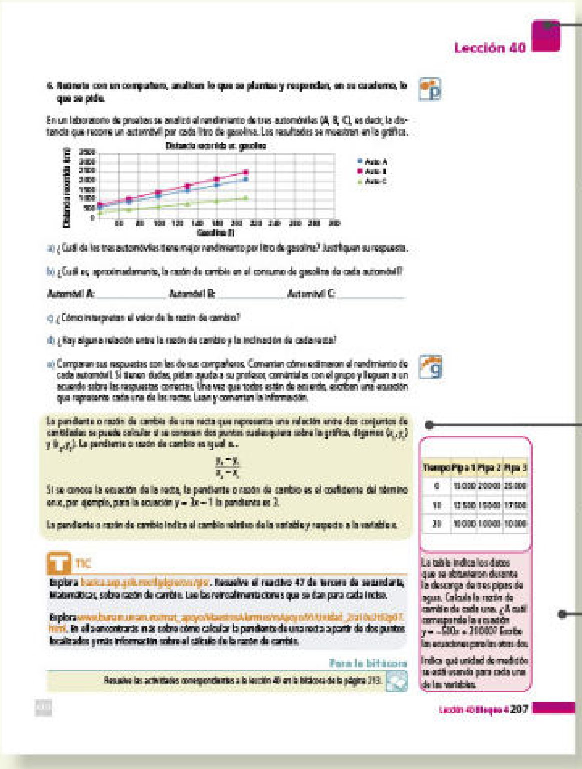
Oriéntate

Pistas o información de apoyo para recordar algunos datos importantes que te servirán para resolver problemas matemáticos.

TIC

Sugerencias de actividades relacionadas con el uso de las TIC. Todos los vínculos se verificaron entre el 10 y el 20 de noviembre de 2013.

Pareja Equipo Grupo



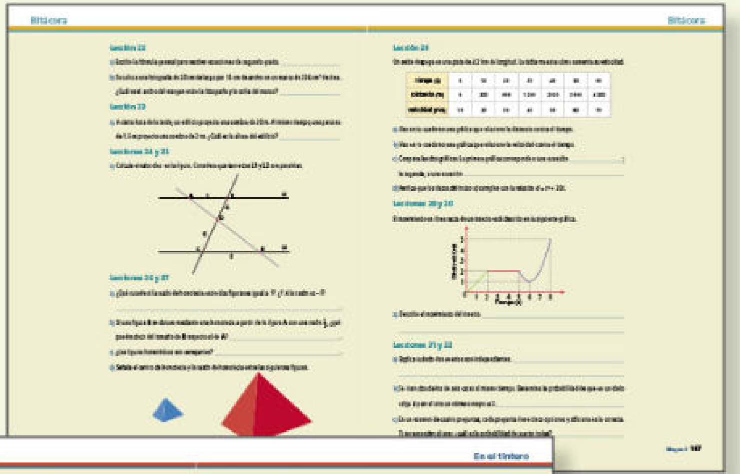
Lección. Recordatorio del número de la lección.

Recuadro de información. Plantea información relevante que te guiará para desarrollar los conocimientos y las habilidades matemáticas necesarias.

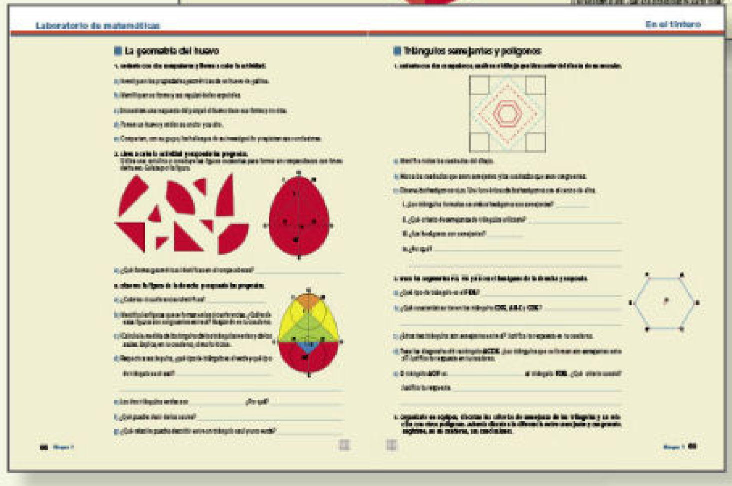
Actividad integradora. Se propone una actividad que se lleva a cabo extraclase. Su función es ayudarte a consolidar tus conocimientos, habilidades, actitudes y valores.

Bitácora. En esta sección de dos páginas practicarás lo aprendido a lo largo del bloque y repasarás las ideas más importantes de las lecciones.

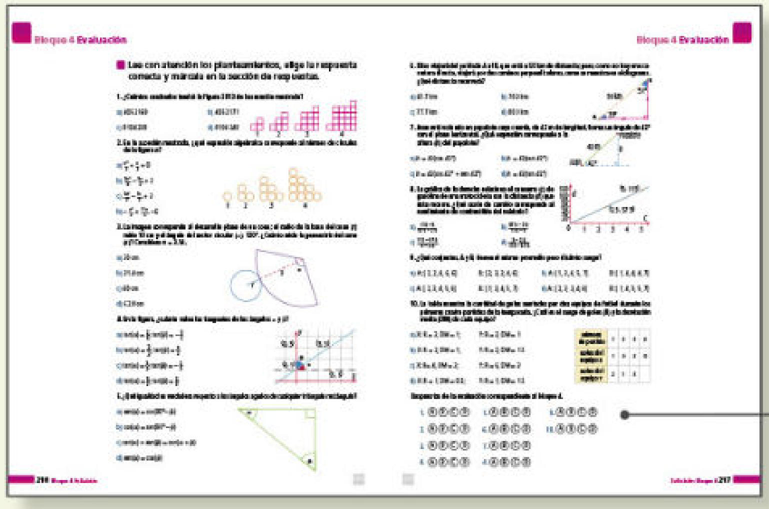
También funciona como autoevaluación, ya que en ella aplicarás los aprendizajes desarrollados en el bloque.



Laboratorio de matemáticas. Es un anexo de actividades propuestas. Con los retos seguirás conociendo y disfrutando la naturaleza de las matemáticas.



En el tintero. Aquí conocerás temas cuyo propósito es introducirte a la cultura de las matemáticas mediante la propuesta de nuevos **retos matemáticos.**

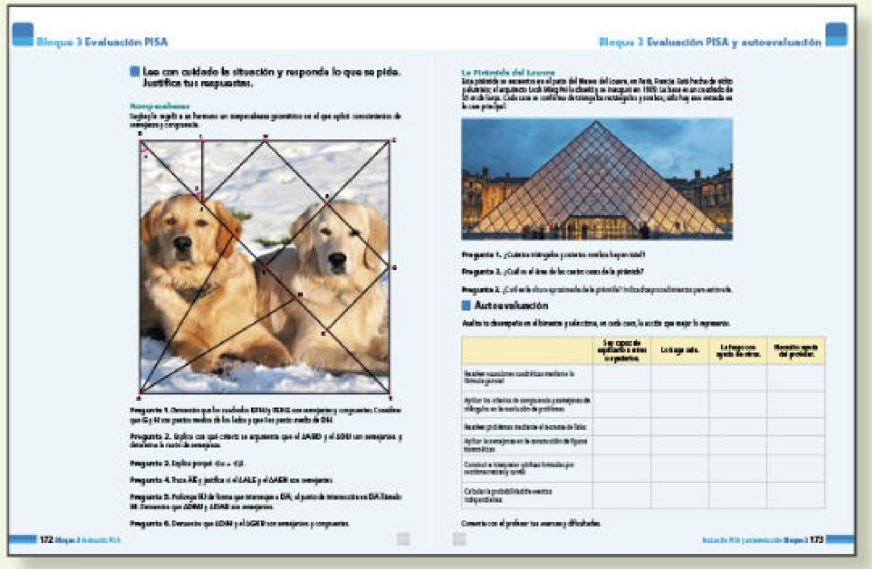


Evaluación. Serie de preguntas de opción múltiple al final de cada bloque. Les servirá a ti y al profesor para evaluar tu desempeño en cuanto a los conocimientos y las habilidades matemáticas adquiridas.

Marca tus respuestas en los círculos.

Guía de uso

Evaluación tipo PISA. Resóndelas en tu cuaderno. Podrás hacerlas de forma individual o en equipo. Es importante que justifiques las respuestas y procedimientos desarrollados.



Autoevaluación. Respóndela con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Glosario. Brinda definiciones de algunos términos matemáticos que se proporcionan, con el fin de que los consultes cuando necesites conocer su significado.

Bibliografía. Proporciona referencias de libros, revistas o páginas de internet que se sugieren para que los consultes en caso de que desees o necesites profundizar en algunos temas del libro.

Bloque	Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Fecha
1	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas	1 y 2	1	
	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades	3	2	
			Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada	4 y 5	3 y 4	
	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad	6 y 7	4 y 5	
			Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas	8	6	
		Nociones de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes	9 y 10	6 y 7	
		Análisis y representación de datos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación	11 y 12	8	
			Bitácora		9	
			Laboratorio de matemáticas			
			En el tintero			
			Evaluación y autoevaluación			

Bloque	Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Fecha
2	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización	13, 14 y 15	10 y 11	
	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras	16	12	
			Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras	17	13	
		Medida	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo	18	14	
			Explicitación y uso del teorema de Pitágoras	19	15	
	Manejo de la información	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)	20 y 21	16	
			Bitácora		17	
			Laboratorio de matemáticas			
			En el tintero			
			Evaluación y autoevaluación			

Bloque	Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Fecha
3	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones	22	18	
	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas	23	19	
			Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales	24 y 25	20	
			Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas	26 y 27	21	
	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos	28	22	
			Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera	29 y 30	23	
		Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)	31 y 32	24	
			Bitácora		25	
			Laboratorio de matemáticas			
			En el tintero			
			Evaluación y autoevaluación			

Bloque	Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Fecha
4	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión	33 y 34	26	
	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos	35 y 36	27 y 28	
		Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente	37	28 y 29	
			Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo	38	29 y 30	
			Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente	39	30	
	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa	40	31	

Bloque	Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Fecha
4	Manejo de la información	Análisis y representación de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión	41	32	
			Bitácora		33	
			Laboratorio de matemáticas			
			En el tintero			
			Evaluación y autoevaluación			

Bloque	Eje	Tema	Contenido	Lección	Semana	Fecha
5	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada	42 y 43	34	
	Forma, espacio y medida	Medida	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto	44 y 45	35	
			Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides	46 y 47	36	
			Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas	48 y 49	37	
	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades	50	38	
		Nociones de probabilidad	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables	51	39	
			Bitácora		40	
			Laboratorio de matemáticas			
			En el tintero			
			Evaluación y autoevaluación			

Bloque 1

Bloque 2

Bloque 3

Bloque 4

Bloque 5

Índice

Megaconstrucciones

El estudio de la matemática es fundamental para el desarrollo de muchas áreas del conocimiento, como física, ingeniería, ciencias de la computación o demografía, ya que sin la comprensión de las matemáticas es imposible entender los usos y aplicaciones que se le da, por ejemplo, para edificar grandes obras de ingeniería civil y arquitectura.

Las relaciones numéricas, algebraicas y geométricas, así como la estadística y la probabilidad, se encuentran presentes en todo momento. Ejemplos de ello los podemos encontrar en las respuestas a estas preguntas: ¿qué aspectos deben considerarse para construir una estructura de más de 800 m de altura en ambientes cuya temperatura es superior a 40 °C?, ¿cómo se estima el tiempo y el ritmo de avance para la construcción de un túnel submarino de casi 50 km de largo?, ¿cuáles deberían ser las medidas de los muros de una presa que contendrá un volumen de casi 40 000 hm^3?

Investiga sobre la arquitectura y las características de la ciudad de las artes y las ciencias en Valencia.

Bloque 1

Aprendizajes esperados

1. Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

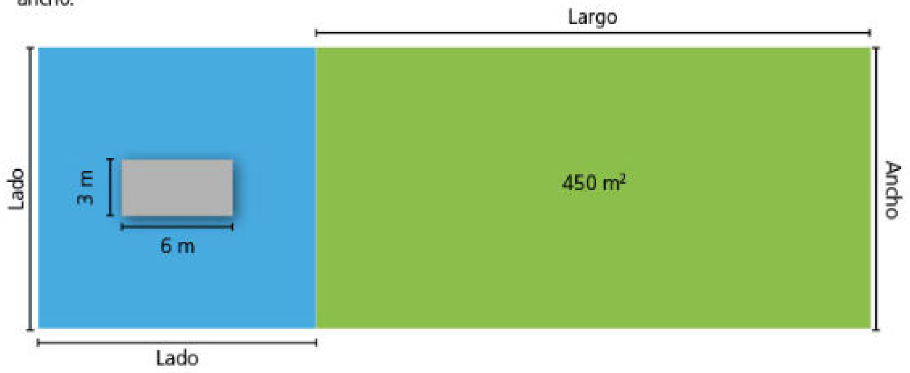
Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: patrones y ecuaciones

Contenido

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

Albercas y jardines

En un centro recreativo se construirá una alberca cuadrada y un jardín rectangular, como se muestra en la figura. En el centro de la alberca se colocará una plataforma de descanso y el resto de la alberca tendrá una superficie de 207 m². En cuanto al jardín se sabe que la medida del largo es el doble del ancho.



1. Reúnete con un compañero y respondan. Tengan en cuenta los datos de la figura y registren en su cuaderno las operaciones o los cálculos.

a) ¿Cuál es el área de la plataforma de descanso? ____________

b) Si se representa como x el lado de la alberca, ¿cuál es la expresión algebraica que representa su área? ____________

c) ¿Cuál es la ecuación que relaciona los lados de la alberca, el área de la plataforma y el área de la superficie con agua? ____________

d) Resuelvan la ecuación anterior y determinen la medida de cada lado de la alberca.

e) Si se representa como y el largo del jardín y como x el ancho, escriban una expresión algebraica que represente el siguiente enunciado: "La medida del largo es el doble del ancho". ____________

f) ¿Cuál es la ecuación que relaciona los lados del jardín y su área? ____________

g) Resuelvan, en su cuaderno, la ecuación anterior y determinen las medidas del jardín.

h) Comparen procedimientos con el resto del grupo y, con la guía de su profesor, escriban una conclusión. Enlisten los distintos procedimientos que usaron y las dificultades que afrontaron.

2. Reúnete con un compañero y hagan lo que se indica en cada caso.

a) **Caso 1**: la alberca

i. Señalen qué ecuaciones permiten calcular la medida del lado de la alberca.

$x(x) - 18 = 207$ $\quad x(x) - 225 = 0$ $\quad x^2 = 225$ $\quad x^2 + 18 = 207$ $\quad x^2 = 189$

ii. Respondan en su cuaderno. En el contexto del problema de la alberca, ¿qué representa la expresión algebraica $x(x)$ o x^2? Resuelvan las ecuaciones que seleccionaron.

iii. ¿Cuál es la superficie de la alberca y la plataforma de descanso juntas? ____________

iv. Relacionen, con una ecuación, la medida del lado de la alberca con esta superficie. ____________

v. ¿Cuál es el valor de x que satisface esta ecuación? ____________

vi. Escriban en su cuaderno las operaciones mediante las cuales resolvieron las ecuaciones que seleccionaron.

b) **Caso 2**: el jardín

i. Señalen qué ecuaciones modelan la situación del jardín.

$x(2x) = 450$ $\quad 2(x + 2x) = 450$ $\quad x^2 = 225$ $\quad 2x + 4x = 450$ $\quad 2(2x^2) = 450$

ii. Respondan en su cuaderno. En el contexto del problema del jardín, ¿qué representa la expresión algebraica x? ¿Y $2x$?

iii. ¿Cuál es el valor de x que satisface la igualdad en las ecuaciones que eligieron? ____________

iv. ¿Cuánto mide cada lado del jardín? ____________

v. Escriban en su cuaderno las operaciones con que resolvieron las ecuaciones que seleccionaron.

c) En grupo, y con la guía de su profesor, comparen resultados. Comenten qué significa que una situación se pueda modelar con una ecuación. Escriban una conclusión sobre por qué hay varias ecuaciones que modelan la misma situación y qué ocurre con la solución de éstas.

Un paso adelante

3. Analiza las ecuaciones. Resuélvelas y describe en tu cuaderno tus procedimientos, indica el o los números que satisfacen la igualdad de cada una.

a) $x^2 = 81$ $\quad x^2 + 1 = 65$ $\quad x^2 - 1 = 99$ $\quad x^2 - 25 = 0$

b) Verónica propuso como solución de la primera ecuación lo siguiente: $(-9)^2 = 81$. ¿Estás de acuerdo con la respuesta de Verónica? ¿Por qué? ____________

____

____

c) En el caso de la ecuación $x^2 + 1 = 65$, ¿existe un número negativo que satisfaga la igualdad? Justifica la respuesta en tu cuaderno.

d) ¿Cuántos valores satisfacen la igualdad en las ecuaciones del inciso a)? ______ ¿Por qué? ______

____

4. La tabla muestra un procedimiento para solucionar la ecuación cuadrática $x^2 - 1 = 143$. Complétala. Describe las operaciones, indica, además, si se aplica alguna operación inversa y cuál es.

	Operaciones
$x^2 - 1 = 143$	
$x^2 - 1 + \_\_\_\_ = 143 + \_\_\_\_$	
$x^2 = 144$	
$\sqrt{x^2} = \pm \_\_\_\_$	
$x_1 = \_\_\_\_$	
$\_\_\_\_ = \_\_\_\_$	
Comprobación	

a) ¿Qué significa el símbolo ±, usado en el procedimiento anterior? ____________

b) Escribe en tu cuaderno una definición de *ecuación cuadrática*.

c) Comparte tus respuestas con el grupo. ¿Qué concluyen respecto al número de soluciones de una ecuación cuya incógnita está elevada al cuadrado? Con ayuda de su profesor, escríbanlo en su cuaderno. Recuerden cuáles son las operaciones inversas.

5. Reúnete con un compañero y consideren la siguiente situación matemática.
El cuadrado de un número menos el doble de este mismo número es igual a 15. ¿Cuál es ese número?

a) Completa la tabla. Escribe la expresión algebraica que representa "el cuadrado de un número menos el doble de este mismo número".

x	x^2	________
−4	16	
−3		
−2	4	
−1		
0		
1		
2	4	
3		
4		
5	25	

b) ¿Cuáles son los números que satisfacen el planteamiento? ____________

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten, con ayuda del profesor, el procedimiento para encontrar las soluciones y compárenlo con los otros que han aplicado en esta lección. Escriban sus conclusiones.

Profundiza

6. Debate con el grupo la siguiente información. Responde en tu cuaderno.

Resolución de una ecuación cuadrática simple

Las soluciones a la ecuación $x^2 = c$ son

$$x_1 = \sqrt{c} \text{ y } x_2 = -\sqrt{c}.$$

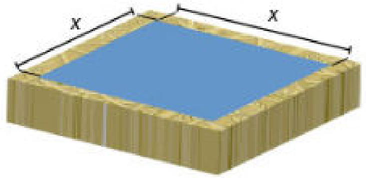
a) Propongan ejemplos del uso de la información anterior. Escriban algunos.

b) ¿Cómo debe ser el valor *c* para usar esta información? Justifiquen su respuesta.

c) ¿Qué procedimiento usarían si el valor *c* no cumpliera las condiciones del inciso anterior? Expliquen.

d) Discutan, con ayuda de su profesor, cuándo aplicar esta información y escriban una conclusión grupal al respecto.

7. Reúnete con algún compañero y lean la situación, planteen una ecuación y resuélvanla.



El triple del área de una alberca de forma cuadrada menos 30 veces la medida de uno de sus lados es igual a cero. ¿Cuánto mide cada lado de la alberca?

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el siguiente enunciado?
"El triple del área de la alberca menos 30 veces la medida de uno de sus lados es igual a cero".

____

b) Resuelvan la ecuación en su cuaderno y determinen cuánto mide cada lado de la alberca.

c) Comparen sus ecuaciones y procedimientos de resolución y respuestas con las de sus compañeros; si difieren en algún caso, verifiquen por qué. Revisen la definición de ecuación cuadrática que escribieron en la actividad 4 b) e indiquen si las ecuaciones que usaron para esta actividad son cuadráticas. Si es necesario, entre todos ajusten su definición.

TIC

Entra a www.redir.mx/matret3-021a. Lee la información y describe, en tu cuaderno, cómo usaste las operaciones inversas en esta lección.

Efectúa las actividades en www.redir.mx/matret3-021b. Explica por qué el resultado de una raíz cuadrada no puede ser un número negativo. Si tienes dudas, acláralas con el profesor.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 1 en la bitácora de la página 66.

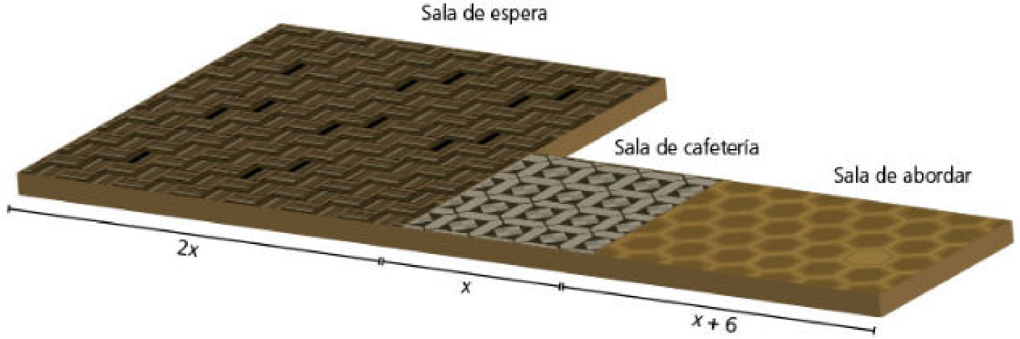
Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: patrones y ecuaciones

Contenido

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

El piso de las salas

Isabel, la arquitecta, participa en la licitación del proyecto para construir una central de autobuses. Su propuesta se compone de tres salas adyacentes: dos cuadradas y una rectangular. El municipio aún no envía la información referente al terreno, así que Isabel ha dejado señaladas en un esquema las relaciones entre las medidas de los lados de las tres salas.



1. Reúnete con un compañero. Respondan lo que se pide y registren en su cuaderno las operaciones o los cálculos que hagan.

a) En la cafetería, ¿cuál es el significado de x? ______

b) En la sala de espera, ¿cuál es el significado de $2x$? ______

c) ¿Qué significa que el largo de la sala de abordar se indique con $x + 6$? ______

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la sala de espera? ______

e) ¿Y cuál representa el área de la sala de abordar? ______

f) Considerando sólo las áreas de la sala de espera y de cafetería, y suponiendo que el área total de éstas es de 320 m^2, indiquen la medida de los lados de cada sala.

Sala de espera: ______ Sala de cafetería: ______

g) Indiquen el área de cada sala.

Sala de espera: ______ Sala de cafetería: ______

2. Comparen sus respuestas con las del resto del grupo. Con la guía del profesor, respondan cuáles son los dos valores de x que encontraron al resolver la ecuación, cuál de ellos es el válido para el problema y por qué. Escriban una conclusión entre todos.

Un paso adelante

3. Reúnete con un compañero y hagan lo que se indica en cada caso.

a) Escriban la ecuación que modela la situación: "El área total de las salas de espera, de cafetería y de abordar es de 432 m^2". ______

b) Determinen los valores que satisfacen su ecuación. ¿Cuáles son? Completen la tabla.

Valor de incógnita	−9	−7	−5	−3	−1	0	1	2	4	6	8
Valor ecuación											

x_1 = ______ x_2 = ______

c) Comparen las soluciones con los resultados de la actividad 1 f). ¿Son diferentes? ¿Por qué? ______

d) Indiquen cuánto miden los lados de cada sala con base en los resultados anteriores.

Sala de espera: ______ Sala de cafetería: ______ Sala de abordar: ______

4. Comparen sus respuestas con las del resto del grupo, guiados por su profesor. Luego respondan cómo se resuelve la ecuación que eligieron, si se puede resolver aplicando las propiedades de la igualdad y si los dos valores de x son los mismos que encontraron en la actividad 1. Escriban una conclusión de manera grupal.

5. Reúnete con un compañero y analicen las ecuaciones. Seleccionen cuál se parece más a la que escribieron en el inciso 3a). Oriéntense por la forma de la ecuación.

$ax^2 + c = 0$ $\quad$ $ax^2 + bx = 0$ $\quad$ $ax^2 + bx + c = 0$

a) Lean con el grupo la siguiente información y hagan lo que se indica.

Una ecuación cuadrática incompleta puede ser de la forma $ax^2 + b = 0$ o de la forma $ax^2 + bx = 0$.

b) Demuestren en su cuaderno por qué la ecuación $x(ax + b) = 0$ es de la forma $ax^2 + bx = 0$.

c) Comenten qué ecuaciones de este tipo resolvieron en la lección anterior y qué procedimientos usaron. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

d) Planteen, con ayuda de su profesor, cómo usar el resultado del inciso anterior para resolver una ecuación cuadrática incompleta. Escriban una conclusión en su cuaderno.

6. Plantea una ecuación para cada inciso, anótala en tu cuaderno y resuélvela.

a) Pensé un número y lo elevé al cuadrado; le sumé 6 al resultado y me dio 150. ¿Qué número pensé?

b) Pensé un número y lo elevé al cuadrado; multipliqué el resultado por 4 y al final obtuve 900. ¿Qué número pensé?

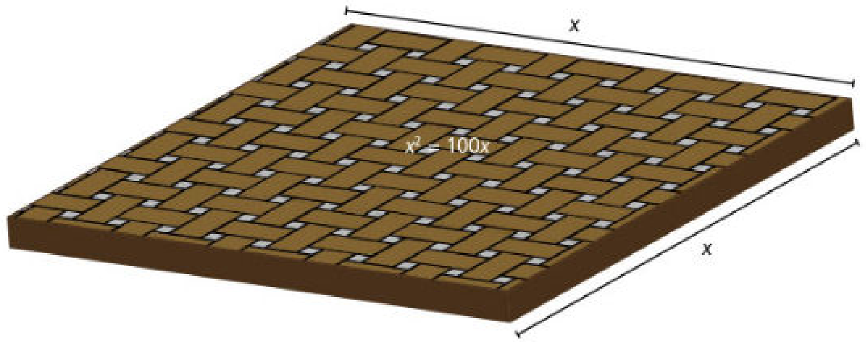
c) El cuadrado de un número es igual al triple del mismo. ¿De qué número se trata?

d) El cuadrado de un número menos el doble del mismo número es igual a 48. ¿Cuál es ese número?

7. Compara tus resultados con los de tus compañeros, guiados por tu profesor. Revisen que hayan planteado la misma ecuación en cada problema y comenten cómo resolvieron las ecuaciones.

Profundiza

8. Reúnete con un compañero, analicen el planteamiento y respondan.
Las dimensiones de una tarima de madera se relacionan como se indica en la figura.



a) ¿Qué significa que la medida de los lados se represente con la misma literal? ______________________

b) Teniendo en cuenta la medida de los lados, ¿cómo se interpreta la expresión $x^2 = 100x$? ______________________

c) Planteen, en su cuaderno, un problema con la información anterior y resuélvanlo.

d) Comparen su problema y la solución con los del grupo, ayudados por su profesor. ¿Todos obtuvieron la misma respuesta? ¿Cuánto mide cada lado de la tarima? ¿Es cierto que su área es igual a cien veces la medida de su lado? Lleguen a una conclusión.

9. Asocien a cada problema la ecuación que relaciona sus datos o la modela.

Problema	Ecuación
( ) El largo de un rectángulo mide cuatro unidades más que el ancho, y su área es 140 m². ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?	a) $a^2 + a = 60$ b) $x(x + 4) = 140$
( ) La suma del área de un cuadrado más su perímetro es 60. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?	c) $a^2 + 4a = 60$
( ) El producto de dos números es 140. Si uno es cuatro unidades mayor que el otro, ¿cuáles son los números?	d) $x^2 + 4x = 140$

10. Redacten un problema que se resuelva con cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

$2x^2 = 100$	
$x^2 - 3x = 100$	
$x(x + 4) = 45$	
$x^2 - 2x = 8$	

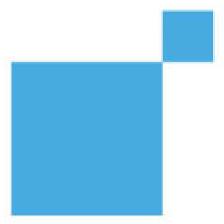
a) Reúnanse con otros dos compañeros e intercambien sus problemas. Verifiquen que cada problema corresponda con la ecuación dada en cada caso. Luego, elijan el que les parezca más interesante y resuélvanlo. Si lo consideran necesario, compártanlo con el resto del grupo.

11. Debate con el grupo la siguiente afirmación: "Algunas ecuaciones cuadráticas carecen de solución". Propongan ejemplos y escriban una conclusión.

TIC

Entra a www.redir.mx/matret3-025a. Encontrarás información sobre las ecuaciones cuadráticas. Elabora un cuadro en el que expliques las características de las ecuaciones que resolviste en esta lección.

Explora www.redir.mx/matret3-025b. Encontrarás una calculadora para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$. Úsala para verificar tus respuestas.



El área total de la figura es de 1 000 m². El lado del cuadrado grande mide tres veces lo que el lado del cuadrado pequeño. ¿Cuáles son las dimensiones de cada cuadrado?

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 2 en la bitácora de la página 66.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: figuras y cuerpos

Contenido

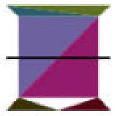
Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades

Te pareces tanto a mí

Jaime es el profesor de arte de una secundaria. Solicitó a un grupo de tercer grado elaborar una maqueta que represente un escenario teatral. Para ello les presentó distintas vistas del escenario.


a) Vista isométrica


b) Vista lateral


c) Vista superior

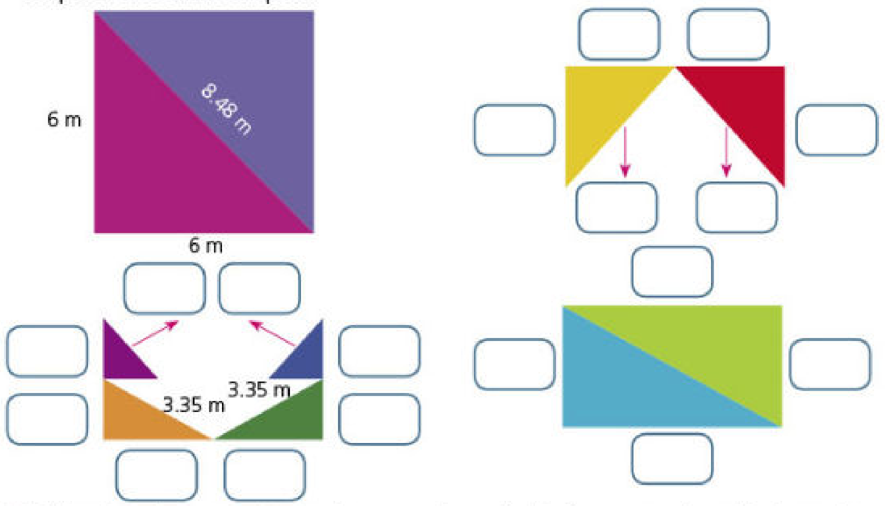
1. Lee la información y efectúa lo que se pide.

El profesor Jaime dio las siguientes indicaciones a sus alumnos acerca de las medidas de la maqueta: "La base debe ser un cuadrado; la altura del escenario es igual a la mitad de un lado de la base. Con eso pueden construir la maqueta del escenario".

a) En papel grueso, cartulina u otro material accesible, construye una maqueta del escenario y coloréala.

2. Reúnete con un compañero. Respondan en el cuaderno.

a) La base del escenario real mide 6 m de lado. Completen las medidas reales de los triángulos que componen el escenario completo.



b) El triángulo azul oscuro está a escala respecto al amarillo. Expliquen por qué y cuál es la escala.

c) El triángulo verde oscuro no está a escala respecto al triángulo rosa. Expliquen por qué.

d) ¿Qué otros triángulos están a escala? Identifíquenlos.

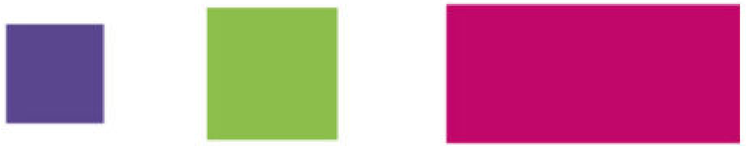
e) Expliquen qué debe ocurrir para que dos figuras estén a escala.

f) Comenten con el grupo los procedimientos que siguieron para trazar las figuras del escenario a escala y, coordinados por el profesor, registren sus acuerdos sobre lo que efectuaron. Escriban una conclusión sobre cuáles son las propiedades o características que deben cumplir dos figuras para que estén a escala, algunas de estas características se enuncian en el recuadro "Oriéntate".

Oriéntate

Entre las características o propiedades de un triángulo, o de cualquier polígono, se alude a la medida de sus ángulos, la medida de sus lados, el número de ejes de simetría, la medida de su área, la medida del perímetro, etcétera.

3. Para el fondo de otro escenario, el profesor Jaime mostró las siguientes figuras.



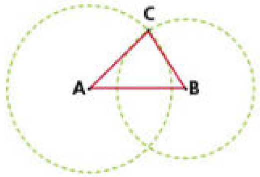
a) Haz, en tu cuaderno, una copia a escala del cuadrado morado, de forma que sus lados midan 135% de los lados de éste. Discutan previamente qué significa que una figura sea 135% de otra. Traza una copia a escala del rectángulo de forma que el lado mayor mida 6 cm.

b) Comenta con un compañero el procedimiento que seguiste para hacer los trazos y compáralo con el suyo. En su cuaderno escriban sus conclusiones y las dificultades que afrontaron; también describan un procedimiento para trazar figuras a escala de cuadrados y rectángulos.

c) Discutan en grupo la siguiente afirmación: "Si se unen dos triángulos rectángulos de manera tal que se forme un cuadrado, se dice que los triángulos son congruentes". Escriban una definición de cuándo dos triángulos son congruentes.

Un paso adelante

4. Observa la figura. En ella está representado un procedimiento para trazar el ΔABC a partir de la medida de sus lados.



a) Escribe en tu cuaderno el procedimiento que se siguió para trazar el **ΔABC** y reprodúcelo.

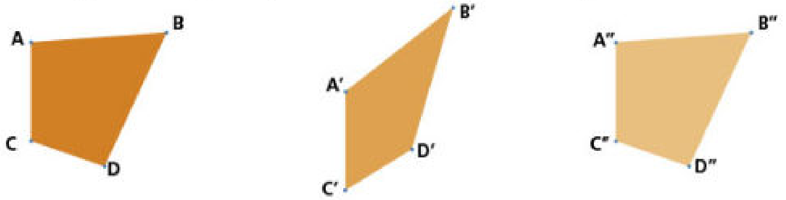
b) Traza en tu cuaderno un **ΔA'B'C'** que sea una reproducción a escala a razón $\frac{1}{4}$ del **ΔABC**.

c) Nombra los lados del **ΔABC** con las letras *a*, *b*, *c* y los lados del **ΔA'B'C'** con *a'*, *b'*, *c'*. Anoten los datos que se piden en la tabla.

ΔABC	∢ **A** =	∢ **B** =	∢ **C** =	$\frac{a'}{a}$ =	$\frac{c'}{c}$ =
ΔA'B'C'	∢ **A'** =	∢ **B'** =	∢ **C'** =	$\frac{b'}{b}$ =	

d) Escribe en tu cuaderno una conclusión sobre las relaciones en común entre los triángulos **ABC** y **A'B'C'**.

5. Traza las diagonales $\overline{AD}$, $\overline{A'D'}$ y $\overline{A''D''}$ de los cuadriláteros. Responde en tu cuaderno.



Oriéntate

ΔABC indica "Triángulo **ABC**".

∢**A** indica la medida del ángulo **A**.

$\overline{\mathbf{AD}}$ indica el segmento que va del punto **A** al punto **D**.

a) ¿El ΔA″B″C″ es una reproducción a escala del ΔABC? ¿Y el ΔA′B′C′? Justifica tus respuestas. Indica las características de las figuras en las que te basas.

b) Nombra los lados del cuadrilátero **ABCD** con las letras *a*, *b*, *c*, *d*, los lados del **A′B′C′D′** con *a*′, *b*′, *c*′, *d*′ y los del **A″B″C″D″** con *a*″, *b*″, *c*″, *d*″. Anota los datos que se piden en la tabla.

Cuadrilátero ABCD	Cuadrilátero A′B′C′D′	Cuadrilátero A″B″C″D″
∢ **A** =	∢ **A′** =	∢ **A″** =
∢ **B** =	∢ **B′** =	∢ **B″** =
∢ **C** =	∢ **C′** =	∢ **B″** =
∢ **D** =	∢ **D′** =	∢ **B″** =
$\frac{a'}{a}$ =	$\frac{a''}{a'}$ =	$\frac{a''}{a}$ =
$\frac{b'}{b}$ =	$\frac{b''}{b'}$ =	$\frac{b''}{b}$ =
$\frac{c'}{c}$ =	$\frac{c''}{c'}$ =	$\frac{c''}{c}$ =
$\frac{d'}{d}$ =	$\frac{d''}{d'}$ =	$\frac{d''}{d}$ =

c) Revisa, con el grupo y la ayuda del profesor, la definición de la actividad 2 f) para figuras a escala. Si es necesario, corríjanla. Escriban un procedimiento para trazar una copia idéntica del **ΔABD** y otro procedimiento para trazar una reproducción a escala de él con razón de escala $\frac{1}{3}$.

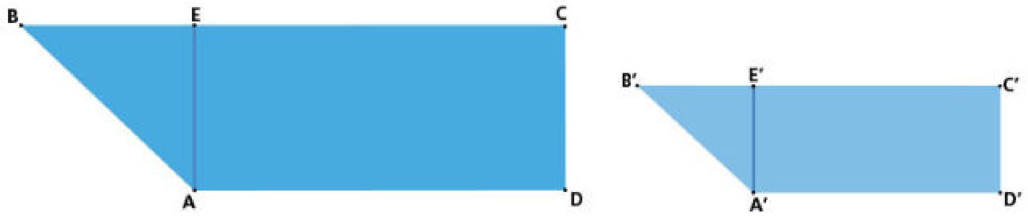
6. En plenaria, lean y analicen las definiciones. Si hay dudas, coméntenlas en clase para su resolución. Discutan el significado de términos como proporcionales, correspondientes, razón, congruente.

Figuras semejantes: relación entre dos figuras que tienen la misma forma, esto es, si las medidas de los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes son iguales. En este caso, se llama **razón de semejanza** al cociente entre dos longitudes correspondientes. Se dice también que las figuras están a escala una de la otra.

Por ejemplo, si un rectángulo es semejante respecto a otro, y la medida de los lados correspondientes es el doble, la razón de semejanza del rectángulo grande respecto al pequeño es 2. Y la del pequeño respecto al grande es $\frac{1}{2}$.

Figuras congruentes: relación entre dos figuras de la misma forma y tamaño, esto es, si las medidas de sus lados correspondientes son iguales y los ángulos correspondientes también. Para indicar que dos figuras son congruentes se utiliza el símbolo ≅.

7. Las siguientes figuras representan incubadoras (vistas desde arriba), que se usan para mantener y reproducir cultivos microbiológicos.



a) En dichas representaciones, ¿los triángulos son semejantes?

b) ¿Los rectángulos son congruentes? Justifica tu respuesta.

c) ¿Cuál es el vértice correspondiente al vértice **A**?

d) ¿Cuál es el ángulo correspondiente al ángulo **B**?

e) ¿Cuál es el lado correspondiente al lado $\overline{CD}$?

f) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Indiquen si, cuando dos figuras no son semejantes ni congruentes, tiene sentido hablar de vértices, ángulos o lados correspondientes.

Profundiza

8. Trabaja con un compañero para resolver el problema.

Una diseñadora gráfica quiere elaborar postales de distintas medidas. Las medidas estándar de las postales son 10 × 15 cm. Las nuevas postales deben ser semejantes entre sí. Completen la tabla.

Postal	1	2	3	4
Largo (cm)	6	8	9	
Ancho (cm)				20

9. Hagan los trazos y respondan en su cuaderno.

a) Tracen dos triángulos obtusángulos semejantes. Indiquen cuál es la razón de semejanza del triángulo más pequeño respecto al grande.

b) Tracen dos rectángulos congruentes.

c) Tracen dos triángulos equiláteros semejantes. Indiquen las dos razones de semejanza que se pueden establecer entre las figuras.

d) Indiquen si cada afirmación es falsa o verdadera. Justifiquen su respuesta.

i) Si dos figuras son semejantes, entonces también son congruentes.

ii) Si dos figuras son congruentes, entonces también son semejantes.

iii) Todos los triángulos equiláteros son congruentes entre sí.

iv) Todos los cuadrados son semejantes entre sí.

v) Todos los rectángulos son semejantes entre sí.

10. Comparen sus resultados en el grupo y verifiquen que sean correctos. Representen, en algunos casos de las figuras semejantes que trazaron, la relación de proporcionalidad entre las medidas de los lados correspondientes.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-029a. Encontrarás información teórica sobre la semejanza y congruencia. Lee la información y compárala con la que estudiaste en la lección. Escribe tus conclusiones en el cuaderno.

Entra a www.redir.mx/matret3-029b. Descarga el documento y efectúa las actividades 1 a 4. Justifica tus respuestas en el cuaderno.

Ingresa a www.redir.mx/matret3-029c. Haz clic en "Problemas con figuras semejantes", ve el video y compara el procedimiento descrito con los que has utilizado. Escribe tus conclusiones en el cuaderno.

Traza una diagonal de cada rombo. Con los triángulos que se forman explica, en tu cuaderno, si los rombos están a escala.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 3 en la bitácora de la página 66.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: figuras y cuerpos

Contenido

Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

Diseños con triángulos

Gisela elabora lámparas con vidrios de forma triangular. Ella basa sus diseños en la semejanza y congruencia entre las formas de los vidrios que usa. Un cliente le preguntó sobre los modelos geométricos que emplea para construir las lámparas; ella respondió que en algunos sólo usa triángulos, por ejemplo, aquellos en los que dos lados midan 2 cm y 3 cm, respectivamente.

1. Trabaja con un compañero. Efectúen, en su cuaderno, lo que se pide y justifiquen sus respuestas.

a) Tracen un triángulo en el que dos de sus lados tengan las medidas dadas por Gisela. Si es posible, tracen dos triángulos más, pero que no sean congruentes respecto al primero.

b) Expliquen el procedimiento que siguieron para trazar los triángulos. Si no les fue posible trazar más de uno, justifiquen por qué.

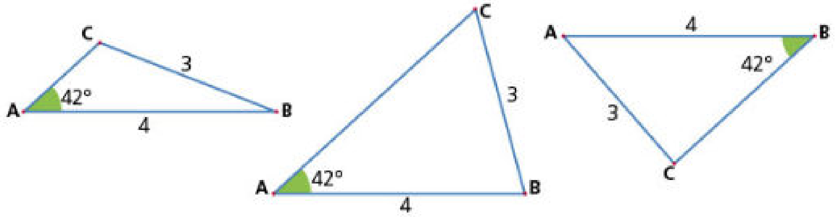
c) Gisela prefiere usar vidrios triangulares de ciertas características para sus diseños. En un diseño usará triángulos cuyos lados midan 3 cm, 3.5 cm y 4 cm, respectivamente.

i. Tracen varios triángulos con esas medidas. Indiquen si los triángulos son congruentes entre sí o si fue posible trazar algunos que no lo fueran.

ii. Expliquen el procedimiento que siguieron para determinarlo.

iii. Gisela le pide a uno de sus colaboradores que haga tres triángulos a escala o semejantes de estos triángulos. ¿Qué datos debe indicarle para que haga estas figuras? Expliquen su respuesta.

d) Al diseñar otra lámpara, un colaborador le dice a Gisela que usará triángulos que tengan un lado de 3 cm, otro de 4 cm y un ángulo de 42°. Le muestra varios triángulos que puede utilizar. Considera que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.



i. Justifiquen si los triángulos son congruentes entre sí.

ii. Determinen si hay otro triángulo que tenga dos lados de 3 cm y 4 cm, y un ángulo de 42°, pero que no sea congruente respecto a alguno de los tres anteriores. Si existe ese triángulo, trácenlo; si no, justifiquen por qué.

e) Comparen sus respuestas y sus procedimientos con los de sus compañeros. Entre todos recuerden las condiciones que deben conocer para que dos figuras sean semejantes o congruentes y hagan lo que se pide.

i. Analicen si en alguno de los triángulos que trazaron fue posible indicar menos condiciones para garantizar que fueran semejantes o congruentes.

ii. Antes de continuar con la lección, cada uno investigue lo que se pide en la actividad 2.

2. Efectúa lo que se pide.

a) Investiga en un diccionario electrónico o impreso el significado de *criterio*.

b) Indaga en un medio electrónico o impreso el significado específico del término *criterio* en matemáticas.

c) Explicita lo investigado, discútelo con tus compañeros y escriban una conclusión sobre lo que entienden por *criterio*. ______________________________

____

____

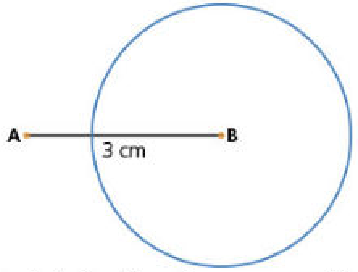
Un paso adelante

3. Trabaja con dos o tres compañeros. Efectúen lo que se pide. Respondan y justifiquen en su cuaderno.

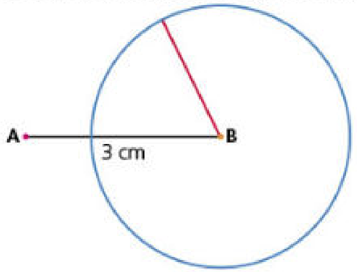
a) Revisen el procedimiento para trazar un triángulo que tenga un lado de 2 cm y otro de 3 cm.

i. Se traza un segmento de 3 cm de longitud.

ii. Se traza, con centro en uno de los extremos de $\overline{AB}$, una circunferencia de 2 cm de radio.



iii. Se traza uno de los radios de la circunferencia para que sea el lado de 2 cm.



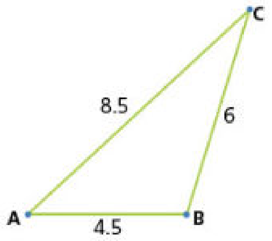
iv. ¿Cuántos triángulos diferentes, es decir, no congruentes, se pueden trazar con este procedimiento? Justifiquen su respuesta. Tracen lo necesario sobre la figura.

v. Elaboren un procedimiento similar para obtener un triángulo cuyos lados midan 4 cm, 5 cm y 6.5 cm, respectivamente. Tracen un triángulo de esas características.

vi. Indiquen si existe otro triángulo, de 4 cm, 5 cm y 6.5 cm de lado, que no sea congruente respecto al que trazaron. Si existe, trácenlo; si no, justifiquen por qué.

4. Hagan lo que se indica. Justifiquen sus respuestas en su cuaderno.

a) Gisela trazó el ΔABC para otro de sus diseños. Indiquen tres medidas de los lados de otro ΔA'B'C' de forma que sean proporcionales a las del ΔABC.



Lado $\overline{A'B'}$ __________ Lado $\overline{B'C'}$ __________ Lado $\overline{A'C'}$ __________

b) Tracen dos triángulos de estas medidas. Expliquen las características de éstos y su relación con el ΔABC.

c) ¿Con estas medidas es posible trazar un triángulo que no sea semejante al ΔA'B'C'? Justifiquen su respuesta.

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten los procedimientos que elaboraron para trazar un triángulo, dadas las medidas de sus lados. Escriban, entre todos, el procedimiento que les parezca más eficiente. Analicen las preguntas y obtengan una conclusión.

i. Si se conoce la medida de los tres lados de un triángulo, ¿todos los triángulos cuyos lados tengan esas medidas serán congruentes entre sí?

ii. Si se conoce la medida de los tres lados de un triángulo, ¿todos los triángulos que tengan las medidas de sus lados proporcionales a éstas serán semejantes al triángulo?

5. Trabaja con dos o tres compañeros. Efectúen lo que se indica y justifiquen las respuestas en su cuaderno.

a) A partir de un punto A, tracen un segmento $\overline{AB}$ que mida 6 cm y otro segmento $\overline{AC}$ que mida 8 cm; el ángulo que se forma entre los segmentos debe medir 100°. Unan B con C para formar un triángulo. ¿Cuál es la medida del lado $\overline{BC}$?

b) Tracen otros dos triángulos que tengan dos de sus lados de 6 cm y 8 cm, respectivamente, y que el ángulo entre estos lados mida 100°. Comparen estos dos triángulos con el ΔABC. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

c) Justifiquen lo siguiente: si dos triángulos tienen dos de sus lados iguales y el ángulo entre esos lados mide lo mismo, ¿cómo son los triángulos entre sí?

d) Indiquen las medidas de dos lados de tres triángulos de forma que sean proporcionales a las medidas de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del ΔABC.

$\overline{A'B'}$ __________ $\overline{A'B'}$ __________

$\overline{A''B''}$ __________ $\overline{A''B''}$ __________

$\overline{A'''B'''}$ __________ $\overline{A'''B'''}$ __________

i. Tracen, en su cuaderno, los triángulos A'B'C', A''B''C'' y A'''B'''C''' de forma que el ángulo ente los lados que indicaron sea de 100°. Midan la longitud del tercer lado de cada triángulo.

$\overline{B'C'}$ __________ $\overline{B''C''}$ __________ $\overline{B'''C'''}$ __________

ii. ¿Cómo son estos tres triángulos con respecto al ΔABC?

e) Justifiquen lo siguiente: si dos triángulos tienen las medidas de dos de sus lados proporcionales y el ángulo entre esos lados mide lo mismo, ¿cómo son los triángulos entre sí?

f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Argumenten y discutan las justificaciones que escribieron.

i. Propongan una redacción más adecuada, a su juicio, para estas justificaciones.

ii. Escriban los criterios que se han trabajado para determinar cuándo dos triángulos son congruentes o son semejantes.

Profundiza

6. Lee con el grupo la siguiente información. Con ayuda de su profesor, aclaren las dudas que surjan.

Dos polígonos son congruentes si la medida de sus lados es igual y la medida de los ángulos correspondientes es la misma. De igual forma, dos polígonos son semejantes si las medidas de los lados son proporcionales y los ángulos correspondientes son iguales.

Para el caso de los triángulos es posible indicar un número menor de esos seis datos, y de todos modos se garantiza que los triángulos son congruentes o semejantes. Estos casos se llaman **criterios de congruencia** o **de semejanza**, los cuales son:

- **Criterio Lado, Lado, Lado** (**LLL**): si los tres lados de dos triángulos miden lo mismo, entonces los triángulos son congruentes. Si las medidas de los tres lados son proporcionales, los triángulos son semejantes.
- **Criterio Lado, Ángulo, Lado** (**LAL**): si dos lados de dos triángulos miden lo mismo y el ángulo entre ellos es igual, entonces los triángulos son congruentes. Si las medidas de los dos lados son proporcionales y la medida del ángulo entre ellos es la misma, los triángulos son semejantes.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-033a. Haz clic en "Semejanza de triángulos", ve el video y compara el procedimiento descrito con los que has utilizado. Escribe tus conclusiones en el cuaderno.

Ingresa a www.redir.mx/matret3-033b. Efectúa las actividades. Analiza los procedimientos que seguiste y compáralos con los que usaste en la lección.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 4 en la bitácora de la página 66.

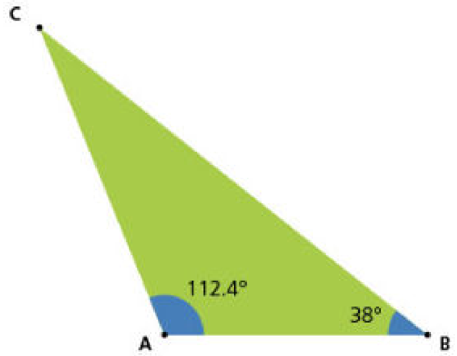
Eje: forma, espacio y medida
Tema: figuras y cuerpos

Contenido

Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

Copias de triángulos

Para un pedido especial, Gisela quiere elaborar varios triángulos que tengan un ángulo de 38° y otro de 112.4°. Ella trazó un triángulo con estas condiciones y le pidió a una de sus colaboradoras que trazara varios triángulos más con esas medidas.



1. Efectúa lo que se indica. Usa tus instrumentos geométricos.

a) Traza otros dos triángulos que cumplan las condiciones pedidas por Gisela.

b) Traza dos triángulos con las condiciones pedidas por Gisela, pero que además uno de los lados mida 3 cm y que estos triángulos sean congruentes entre sí.

c) Comenta con el grupo los procedimientos que siguieron para trazar los triángulos. Discutan, con ayuda del profesor, si pueden establecer algún criterio de semejanza o de congruencia a partir de sus trazos.

Un paso adelante

2. Efectúa lo que se indica. Justifica tus respuestas.

a) Mide los lados del ΔABC.

$\overline{AB}$ ______________ $\overline{AC}$ ______________ $\overline{BC}$ ______________

b) Susana, la colaboradora de Gisela, trazó un triángulo con las medidas que le indicó e hizo el siguiente esquema para trazar otros cuatro.

c) Completa los cuatro triángulos. Nómbralos como triángulo 1, 2, 3 y 4.

d) ¿Los triángulos cumplen la condición solicitada? ______________

e) Completa la tabla con la medida de los lados y de los ángulos. En la misma columna coloca las medidas de los elementos correspondientes.

Triángulo	Lado	Lado	Lado	Ángulo	Ángulo	Ángulo
ΔA'B'C'				112.4°	38°	
Δ1						
Δ2						
Δ3						
Δ4						

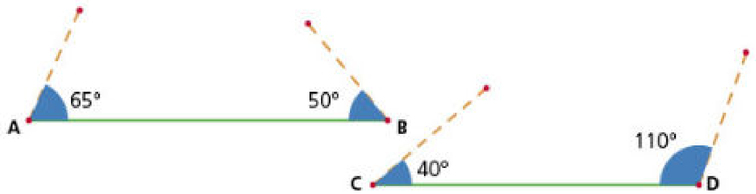
f) ¿Cómo calculaste la medida del ángulo que falta?

g) ¿Hay alguna relación entre las medidas de los ángulos de cada triángulo que trazaste y la medida de los ángulos del triángulo de Gisela? Argumenta.

h) ¿Hay alguna relación entre las medidas de los lados de cada triángulo que trazaste y la medida de los lados del triángulo de Gisela? Argumenta.

i) Registra las conclusiones a las que llegaste respecto a lo argumentado en los incisos g) y h).

3. Analiza las construcciones. Completa los triángulos y responde.



a) ¿Qué datos conoces en cada caso?

b) Si se conocen esos datos, ¿cuántos triángulos distintos es posible trazar? Justifica tu respuesta.

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten si es posible definir un criterio de congruencia o de semejanza a partir de lo que trabajaron en las actividades 2 y 3. Retomen las conclusiones que obtuvieron en la actividad 2, inciso i).

Profundiza

5. Lee con el grupo la siguiente información. Con ayuda del profesor aclaren las dudas que surjan.

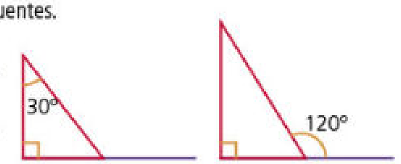
Si se conoce la medida de dos ángulos de un triángulo, entonces todos los triángulos que se tracen con esas medidas serán semejantes entre sí. Esto se conoce como el **criterio Ángulo, Ángulo (AA)** para semejanza.

Si se conoce la medida de dos ángulos de un triángulo y la medida del lado que está entre esos ángulos, entonces todos los triángulos que se tracen con esas medidas son congruentes. Esto se conoce como el **criterio Lado, Ángulo, Lado (LAL)** para congruencia.

a) Propongan ejemplos para cada criterio y expónganlos al grupo. Apóyense en la construcción de triángulos rectángulos, isósceles o equiláteros.

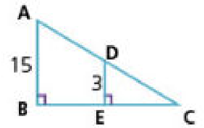
6. Reúnete con un compañero. Resuelvan los problemas y justifiquen sus respuestas.

a) Expliquen si los triángulos son semejantes o congruentes.



b) Analicen la construcción y determinen la medida de $\overline{AD}$ si $\overline{AC}$ mide 25 cm.

Justifiquen su respuesta.



c) Comparen sus respuestas. Discutan y argumenten los procedimientos de resolución.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-037a. Resuelve los triángulos semejantes. Describe, en el cuaderno, las conclusiones de lo que observas en las actividades. Coméntalas con un compañero.

Explora www.redir.mx/matret3-037b. Haz clic en "Aplicaciones de la semejanza de triángulos", ve el video y compara el procedimiento descrito con los que usaste en la lección. Escribe tus conclusiones en el cuaderno.

Traza un cuadrado, un rectángulo, un rombo y un paralelogramo. En cada uno traza una diagonal. Indica qué criterio de congruencia se usa para mostrar que, en cada caso, se obtienen dos triángulos congruentes.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 5 en la bitácora de la página 66.

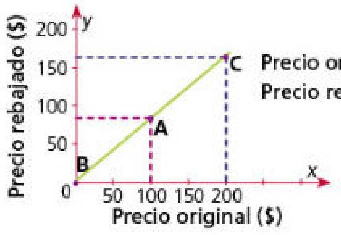
Eje: manejo de la información
Tema: proporcionalidad y funciones

Contenido

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

Las rebajas

Como estrategia de mercadotecnia, en un centro comercial se descuenta 18% en el precio de todos los productos que venden. El contador general ha elaborado una gráfica que relaciona el precio rebajado de cualquier artículo y el precio original.



1. Reúnete con un compañero para contestar. Registren en el cuaderno las operaciones o los cálculos.

a) ¿Cuáles son las coordenadas del punto **A**? ____________

b) ¿Cuál es el valor de la ordenada del punto cuya abscisa es 150? ____________

c) Si el descuento es de 18%, ¿cada producto cuesta 82% de su precio original? Justifiquen en su cuaderno.

d) ¿Cuánto se descuenta por cada $100.00 de compra? ____________

e) ¿Cuánto cuesta una camisa que antes costaba $250.00? ____________

f) Si una persona paga $65.60 por un artículo, ¿cuánto costaba antes? ____________

g) Si se representa como x el precio original, ¿cuál es la expresión algebraica que representa 82% de x? ____________

h) Si se representa como y el precio rebajado, escriban una expresión algebraica que represente la relación entre el precio original y el precio rebajado. ____________

i) ¿La relación entre el precio original y el rebajado es de proporcionalidad? ____________

Si es así, ¿cuál es la constante de proporcionalidad? ____________

j) ¿Cuál es la pendiente de la recta? ____________

k) Compara tus respuestas con las del grupo, guiados por el profesor. Discutan cómo se puede interpretar el resultado de multiplicar la constante de proporcionalidad por el precio original y escriban una conclusión al respecto.

Un paso adelante

2. Trabaja con un compañero en lo que se indica.

a) Apliquen el descuento de 18% en los siguientes precios y encuentren el precio rebajado.

Precio original ($)	100	200	300	400	500	600
Precio rebajado ($)						

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ____________

c) ¿Qué expresión algebraica representa la relación entre el precio original y el rebajado?

____

d) ¿La expresión algebraica describe la misma situación del ejercicio 1? ____________

¿Por qué? ____________

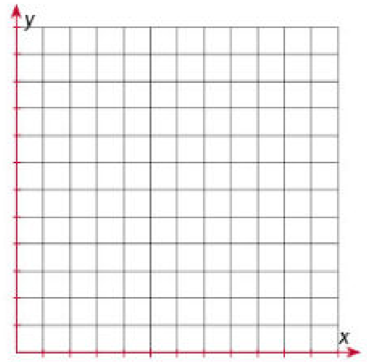
e) Comparen sus respuestas con las del grupo, guiados por el profesor. Comenten acerca de cómo se determina que una relación sea de proporcionalidad.

3. Analiza el planteamiento y resuelve en tu cuaderno.

En una zona de la Ciudad de México se han instalado parquímetros. Se quiere recolectar dinero mediante el pago por un derecho temporal de estacionar un vehículo en vía pública. La norma indica que se debe pagar cierta cantidad de dinero por cada minuto. Joel y Verónica estacionan sus automóviles e insertan dinero en los parquímetros respectivos. Joel, por $20.00, dispone de 50 minutos; y Verónica, por $15.00, tiene 37.5 minutos.

a) Construyan, en su cuaderno, una tabla, coloquen los datos del problema y determinen cuál es el factor de proporcionalidad.

b) Representa la situación con una gráfica en el siguiente plano cartesiano.



c) Si se representa como x el tiempo y como y el costo, ¿cuál es la expresión algebraica que relaciona el costo con el tiempo?

d) ¿Cuál es la pendiente de la recta?

e) ¿Cuál es el valor de la ordenada del punto cuya abscisa es 40?

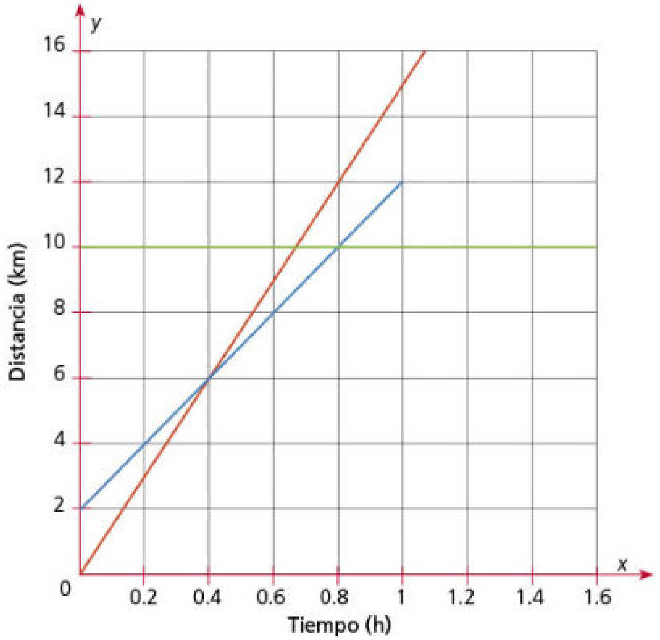
f) ¿Cuánto se debe pagar por 1 h de estacionamiento?

g) Si una persona estacionó su automóvil durante 30 min, ¿qué cantidad de dinero insertó en el parquímetro?

h) Compara tus respuestas con las del grupo, guiados por el profesor. Comenten acerca de cómo resolvieron las actividades y escriban una conclusión al respecto.

Profundiza

4. Reúnete con un compañero, analicen el planteamiento y respondan en el cuaderno.
En una competencia de ciclismo, los participantes se han dividido en dos grupos. En cierto tiempo, tomado como tiempo 0, un grupo está a 8 km de la meta y avanza a 10 km/h; el otro grupo está a 10 km de la meta y se desplaza a 15 km/h. La gráfica muestra la situación.



a) ¿Cuál es la recta que representa al grupo que va adelante?

b) ¿Cuál es la recta que indica la meta?

c) ¿Cuál es la recta que indica una relación de proporcionalidad?

d) Si los grupos se desplazan con rapidez constante, ¿el segundo grupo alcanzará al primero? En caso afirmativo, ¿en cuánto tiempo y a qué distancia de la meta ocurrirá?

e) Compara tus respuestas con las del grupo, guiados por el profesor.

5. Reúnete con un compañero, analicen el planteamiento y respondan en su cuaderno.
El sistema métrico utiliza la escala Celsius para medir la temperatura. Sin embargo, la temperatura en Estados Unidos de América todavía se mide en grados Fahrenheit. El agua se congela a 0 °C y hierve a 100 °C, lo que indica una diferencia de 100°. El agua se congela a 32 °F y hierve a 212 °F, lo que indica una diferencia de 180°. Por lo tanto, cada grado en la escala Fahrenheit es igual a $\frac{100}{180}$ o $\frac{5}{9}$ o 1.8 grados en la escala Celsius. Algunos ejemplos de esta relación se muestran en la tabla:

Celsius	–50	–40	–30	–20	–20	0	10	20	30	40	50
Fahrenheit	–58	–40	–22	–2	14	32	0	68	86	104	122

La relación entre los datos de la tabla está dada por la siguiente expresión algebraica: $y = 1.8x + 32$.

a) ¿Qué representa la variable x? ¿Y la variable y? ______

b) Construyan una gráfica que represente la relación entre grados Celsius y grados Fahrenheit, con base en lo anterior.

c) ¿La relación entre las escalas es proporcional? ______ ¿Por qué? ______

d) Reúnanse con otros dos compañeros y comenten qué características diferentes encuentran en su gráfica respecto a una gráfica de variación proporcional.

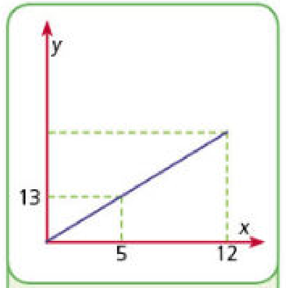
6. Debate con el grupo acerca de la siguiente afirmación. Propongan ejemplos y escriban una conclusión.

La relación entre dos variables es proporcional si cuando varía una la otra varía de modo que su cociente es una constante; más precisamente, si las variables son x y y, entonces $\frac{y}{x} = k$, donde k es constante. Si el cociente $\frac{y}{x}$ no es constante (es decir, varía) entonces la relación entre x y y no es proporcional.

7. Organízate con el grupo para contestar las siguientes preguntas con ayuda del profesor.

a) Al graficar expresiones como $y = 4x$ o $y = 4x + 6$ se obtendrán rectas. ¿Cuál es la diferencia entre ellas? ______

b) Un estudiante dijo que toda expresión lineal que contenga un signo – (menos) dará lugar a una gráfica con pendiente negativa. ¿Estás de acuerdo? ______ ¿Por qué? ______



En la gráfica x es el número de minutos que se mantiene un grifo abierto, y es el número de metros cúbicos de agua que arroja. ¿Cuál es el valor que corresponde a $x = 12$ y qué representa?

TIC

Entra a www.redir.mx/matret3-041a. Lee las secciones "Proporción" y "Proporcionalidad directa" y compara esa información con lo que aprendiste en esta lección. Comenta tus dudas y conclusiones con un compañero.

Entra a www.redir.mx/matret3-041b. Resuelve los ejercicios sobre variación proporcional. En cada caso traza la gráfica que corresponde a la situación. Describe, en el cuaderno, el procedimiento que seguiste para trazarla y compáralo con el de dos o tres compañeros.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 6 en la bitácora de la página 67.

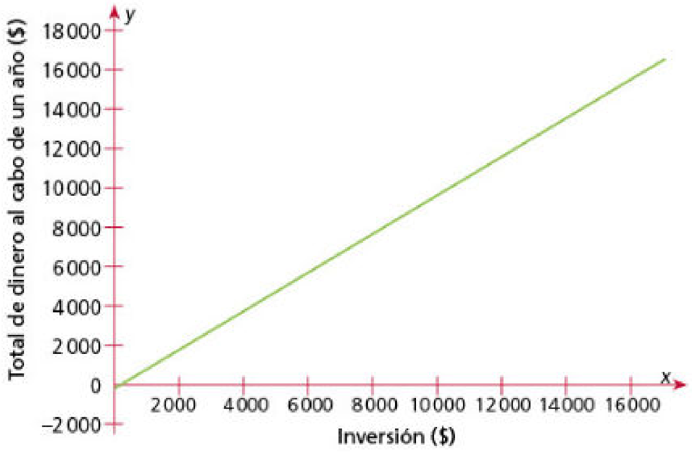
Eje: manejo de la información
Tema: proporcionalidad y funciones

Contenido

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

Análisis de inversiones bancarias

El Banco del Sur ofrece en su inversión a plazo fijo un interés anual de 5%, pero cobra una comisión por manejo de cuenta de $200.00 anuales sea cual sea la cantidad que se invierta. La siguiente gráfica muestra esta relación.



1. Reúnete con un compañero y contesten en su cuaderno.

a) Si una persona invierte $2 000.00, ¿qué cantidad tendrá al cabo de un año?

b) ¿De cuánto es la inversión mínima para tener ganancias al cabo de un año?

c) ¿Cuál es la inversión inicial si se genera un total de $1 165.00 al cabo de un año?

d) ¿Qué cantidad, debida al interés, se genera al año con una inversión de $15 000.00?

e) ¿La gráfica presenta una relación de proporcionalidad? Justifiquen su respuesta.

f) Comparen sus respuestas con las del grupo y con ayuda del profesor elijan los procedimientos que arrojan resultados correctos.

Un paso adelante

2. Reúnete con un compañero. Efectúen lo que se indica y contesten en su cuaderno.

a) Completen la tabla sin considerar la comisión de $200.00 que cobra el banco por manejo de cuenta.

Inversión ($)	1000	2000	3000	4000	5000	10000	20000	50000
Cantidad generada al cabo de un año								

b) ¿Cuál es el factor de proporcionalidad entre las cantidades de la tabla?

c) ¿El factor de proporcionalidad está relacionado con el porcentaje de ganancia que ofrece el banco?

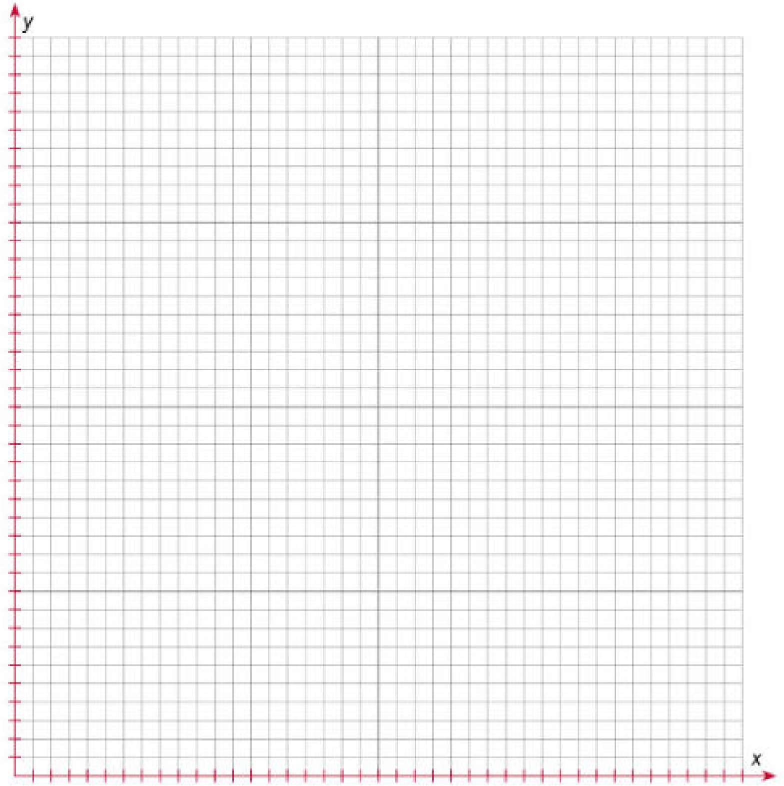
d) Si representan como x la inversión y como y los intereses generados al cabo de un año, ¿cuál es la expresión algebraica que modela la relación entre la inversión y los intereses generados?

e) Completen la tabla considerando la comisión de $200.00 que cobra el banco por manejo de cuenta.

Inversión ($)	1000	2000	3000	4000	5000	10000	20000	50000
Total de dinero al cabo de un año ($)								

f) Si representan como x la inversión y como y el total de dinero al cabo de un año, ¿cuál es la expresión algebraica que modela la relación entre la inversión y el total de dinero?

g) Grafiquen, en el plano cartesiano, la información contenida en las tablas.



h) ¿Cuál es la diferencia entre las dos gráficas?

i) ¿A partir de qué cantidad de inversión inicial lo que aportan los intereses es mayor que la comisión?

j) Comenten, de manera grupal, sus dudas y aclárenlas entre todos. Luego, efectúen un debate sobre los siguientes cuestionamientos: ¿cuál es la diferencia entre una relación del tipo $y = ax$ y del tipo $y = ax + b$ si se presenta la información en una tabla? ¿Y si se presenta la información en una gráfica?

Profundiza

3. Reúnete con un compañero. Analicen el planteamiento y respondan en su cuaderno.

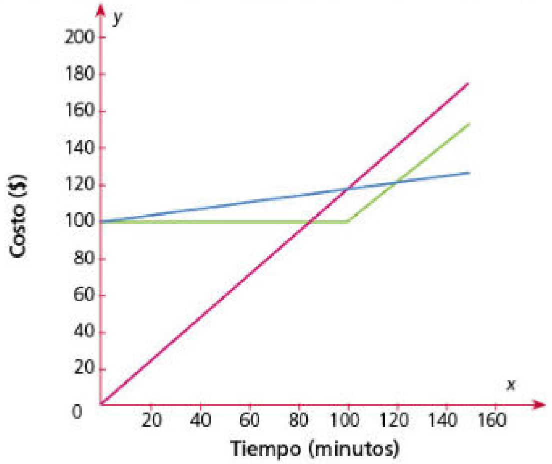
Tres compañías de telefonía celular ofrecen las siguientes tarifas.

Compañía A: cuota fija de $100.00 más $0.20 por minuto.

Compañía B: $1.20 por minuto.

Compañía C: 100 minutos de tiempo aire. Agotado el tiempo, $1.00 por minuto.

La relación entre el tiempo y el costo de cada compañía se representa en la siguiente gráfica.



a) ¿De qué color es la gráfica que representa a la compañía A? ¿Y la gráfica de la compañía C?

b) ¿Qué compañía presenta una relación proporcional en su tarifa? ¿Cuál es su gráfica?

c) Completen las tablas para calcular el precio por minuto de las compañías de telefonía celular.

Compañía A	
Minutos	**Costo ($)**
1	
5	
10	
20	
40	
60	
120	
150	

Compañía B	
Minutos	**Costo ($)**
1	
5	
10	
20	
40	
60	
120	
150	

Compañía C	
Minutos	**Costo ($)**
1	
5	
10	
20	
40	
60	
120	
150	

d) Si x representa el tiempo y y el costo, ¿cuál es la expresión algebraica que corresponde a cada una de las gráficas? Escríbanlas.

Compañía A: ____________ Compañía B: ____________ Compañía C: ____________

e) Si una persona habla entre 60 y 150 minutos al mes, ¿le conviene el plan C?

f) Si una persona habla menos de 60 minutos al mes, ¿le conviene la compañía B?

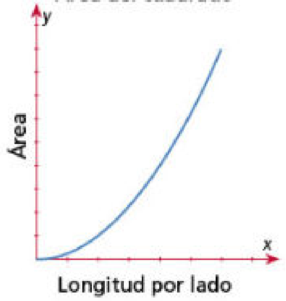
g) Si una persona habla más de 150 minutos al mes, ¿le conviene la compañía A?

h) Comparen, con la ayuda del profesor, sus respuestas con las del grupo. Si existen diferencias, resuélvanlas y lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas. Comenten si es posible representar mediante una sola expresión algebraica la relación entre el tiempo y el costo de la compañía C.

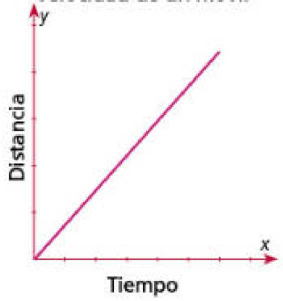
4. Analiza lo que se presenta y responde lo que se pide.

Las gráficas muestran la relación entre tres pares de magnitudes.

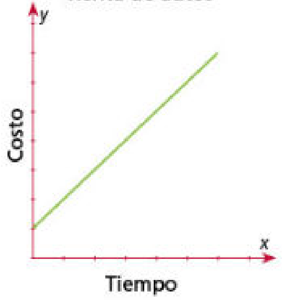
Área del cuadrado



Velocidad de un móvil



Renta de autos



a) ¿Cuál corresponde a una relación de la forma $y = ax$ y cuál a la forma $y = ax + b$? Justifica tu respuesta.

b) Escribe una situación problemática para la gráfica que represente una relación de proporcionalidad y anota su solución.

c) Intercambia tus problemas con los de un compañero y que cada quien los resuelva por su cuenta. Al terminar comenten cómo los resolvieron.

5. Haz, con el grupo, un debate sobre la siguiente información. Propongan ejemplos y escriban una conclusión.

Cuando dos conjuntos de cantidades se relacionan de manera lineal, es posible representar esa relación de distintas maneras: una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.

Cuando la variación es lineal, la gráfica es una recta que pasa por el origen si la relación es de proporcionalidad; pero si la relación lineal no es proporcional, la recta no pasa por el origen, sino por algún valor de las ordenadas.

Las funciones lineales son una herramienta útil para representar y analizar diversas situaciones.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-045a. Encontrarás información sobre las características de las relaciones de proporcionalidad. Efectúa las actividades que se proponen; si tienes dudas, revisa la conclusión a la que llegaron en esta lección.

Entra a www.redir.mx/matret3-045b. Trabaja con un compañero. Resuelvan las actividades y escriban, en su cuaderno, los procedimientos que siguieron. Si tienen dudas, revisen las actividades de esta lección.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 7 en la bitácora de la página 67.

Una tubería que aporta un caudal de 45 litros por minuto llena un depósito en hora y media. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito si se aumenta el caudal hasta los 90 litros por minuto?

Modela la situación en un plano cartesiano y señala los puntos que representan el momento en el que se llena el depósito. Luego, si es una relación de proporcionalidad, escribe la función del tipo $y = kx$, que la representa.

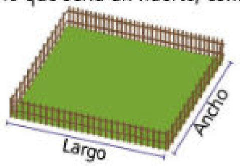
Eje: manejo de la información
Tema: proporcionalidad y funciones

Contenido

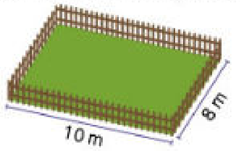
Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

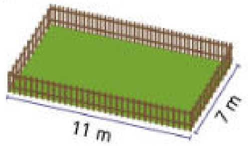
Cercado rectangular

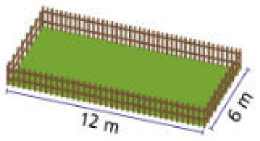
Don Mateo es dueño de un terreno y le dio a Gerardo, su hijo, 36 metros lineales de valla de madera para que delimitara la extensión de lo que sería un huerto, como se muestra abajo.



Don Mateo quiere que el área de la parte cercada sea la mayor posible. Gerardo hizo tres diseños para ver cuál es la mejor alternativa.







1. Reúnete con un compañero y contesten.

a) ¿Cuánto debe sumar la longitud de los lados del terreno cercado? ____________

b) Si x representa la medida del largo, ¿cuál es la expresión que representa el ancho? ________

c) Completen la tabla para buscar la relación entre el largo del terreno y su área.

Largo	Ancho	Longitud total	Área
10		(2)(___) + 2(___) = 36	(10)(___) = ______
	7	(2)(___) + 2(7) = ______	(___)(7) = ______
		(2)(___) + 2(___) = ______	(___)(___) = ______
x		2(x) + 2(___)= ______	A = ______

d) ¿Las tres propuestas que hizo Gerardo son las únicas alternativas? ____________ ¿Por qué?

____

e) ¿Es posible que el terreno cercado tenga lados que midan 11 m y 9 m, respectivamente? ______

¿Por qué? ____

f) ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona el largo del terreno (x) y su área (A)? ________

g) Completen la tabla. Verifiquen que los datos de la tabla corresponden a la expresión algebraica que escribieron.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A																		

h) Comparen sus respuestas con las del grupo y con ayuda del profesor. Comenten si la expresión algebraica que escribieron en el inciso g) es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Un paso adelante

2. Efectúa lo que se indica en cada caso.

a) Completa la tabla con las medidas del largo y del área del terreno. Verifica que, en todos los casos, se cumpla que el perímetro del terreno sea de 36 m. Utiliza calculadora.

Medida de un lado del terreno cercado (m)	Área (m²)	Medida de un lado del terreno cercado (m)	Área (m²)
7	$A = (7)(11) = 77$ m²	8.9	
7.5		9	
8		9.1	
8.5		9.2	
8.6		9.3	
8.7		9.4	
8.8			

b) ¿La relación de los datos de las dos columnas es una relación de proporcionalidad? ________

¿Por qué? ____

c) ¿Un lado del terreno podría medir 18 metros? ____________ Explica por qué. ________

____

d) ¿Qué observas en el comportamiento de los valores del área respecto al de los valores de la medida de un lado? ____

____

e) ¿Qué tamaño debe tener el terreno para que el área sea la mayor posible? ____________

f) Reúnete con el grupo y comparen sus respuestas con ayuda del profesor. Comenten por qué al aumentar un lado, disminuye el otro.

3. Lee, con el grupo y con ayuda del profesor, la siguiente información.

Una expresión algebraica de la forma: $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, representa una relación cuadrática. En la expresión anterior ax^2 es el término cuadrático, bx es el término lineal, y c el término independiente.

a) Comenten las preguntas y escriban, en su cuaderno, una conclusión general.

i. De acuerdo con lo anterior, ¿la relación de variación entre los datos de la tabla es cuadrática? Expliquen su respuesta.

ii. ¿Cuál es la diferencia entre una relación lineal y una relación cuadrática?

iii. ¿Cómo se puede reconocer que la relación entre dos variables es una variación cuadrática a partir de su expresión algebraica?

Profundiza

4. Analiza, con el grupo, los planteamientos y respondan en su cuaderno.

a) Analicen y completen la tabla. Lean la información y, con ayuda del profesor, resuelvan sus dudas.

	x	y		
	–4	8		
+ 2	–2	2	– 6	+ 4
+ 2	0	0	– 2	____
+ 2	2	2	+ 2	____
+ 2	4	8	____	

Si una tabla con valores relacionados presenta un cambio constante en los valores de una de las variables, se averigua si las segundas diferencias de la otra variable son constantes. Si esto ocurre, entonces la relación entre las dos variables es de variación cuadrática.

i. Identifiquen las primeras diferencias en la tabla para la variable y.

ii. Identifiquen las segundas diferencias para la variable y.

5. Trabaja en pareja. Completen la tabla y anoten las primeras y las segundas diferencias. Tomen $\pi = 3.14$. Utilicen calculadora.

Medida del radio de un círculo (cm)	Medida de su área (cm²)
1	
4	
7	
10	
13	
16	
19	
22	

a) Si x representa el radio, ¿cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre la medida del radio y el área del círculo? ____________________

b) ¿La relación entre la medida de un lado de un cuadrado y su área es de variación cuadrática? Indiquen dos razones con las que pueden justificarlo.

____

____

____

____

c) Encuentren la expresión algebraica que representa cada relación.

i. La relación entre la medida del lado de un cuadrado y su área. ____________________

ii. La relación entre la altura y el volumen de un prisma recto cuya base tiene un área de 18.5 cm².

____

iii. La relación entre el volumen de una pirámide cuadrangular recta cuya altura es de 10 cm y la medida de un lado de la base. ____________________

iv. Indiquen cuáles de las relaciones anteriores son cuadráticas, por ejemplo, la relación entre volumen, base y altura (10) de la pirámide cuadrangular ($V = \frac{10}{3}x^2$).

6. Efectúen lo que se indica.

a) En una granja avícola se ha detectado un virus que está matando a las gallinas; el área de producción somete a un tratamiento a toda la población de gallinas. A partir de los datos recabados durante este proceso, se generó un modelo matemático de la mortandad de las gallinas: $y = -x^2 + 10x + 40$, donde x indica el número de días transcurridos y y el número de gallinas muertas. Completen la tabla.

Días (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gallinas muertas (y)	40										

b) ¿A partir de qué día comienza a ser efectivo el tratamiento? ____________________

c) ¿Cuántos días duró la enfermedad? ____________________

d) ¿En qué día hubo el mayor número de gallinas muertas? Justifiquen su respuesta.

____

____

7. Comparen sus respuestas de las actividades 5 y 6 con las del grupo. Si tienen dudas, coméntenlas con el profesor y aclárenlas con las aportaciones de otros compañeros.

TIC

Entra a www.redir.mx/matret3-049a. Resuelve el reactivo 22 de la GIS de tercero de secundaria, Matemáticas, sobre variación cuadrática. Lee las retroalimentaciones para cada opción de respuesta y escribe un resumen sobre ellas en tu cuaderno.

Ingresa a www.redir.mx/matret3-049b. Trabaja con un compañero. Resuelvan las actividades y escriban, en su cuaderno, los procedimientos que siguieron. Si tienen dudas, revisen las actividades de esta lección.

Se tiene un rectángulo con un perímetro de 36 metros, el cual tiene un lado de longitud x metros.

Escriban una ecuación que represente la variación del área (y) en función del lado x.

¿Cómo verifican que sus ecuaciones sean correctas?

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 8 en la bitácora de la página 67.

Eje: manejo de la información
Tema: nociones de probabilidad

Contenido

Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

¿La cirugía ocular o usar lentes de contacto?

Karina tiene miopía y usa lentes de armazón, en una visita a su oftalmólogo leyó la siguiente información en una revista especializada.

Los resultados de investigaciones recientes afirman que las personas que usan lentes de contacto todos los días durante 30 años tienen una probabilidad de **1 en 100** de desarrollar una infección en los ojos que sea peligrosa y existe la probabilidad de **1 en 2 000** de que experimenten pérdida de visión como consecuencia de su uso. Por otro lado, el riesgo de que ocurra una importante pérdida de la visión con la cirugía ocular con láser es de **1 en 10 000**.[1]

1. Trabaja con dos compañeros. Analicen la situación y efectúen lo que se indica. Respondan en su cuaderno.

a) De acuerdo con la información, para las personas que tienen alguna debilidad visual, ¿qué es más riesgoso: la cirugía ocular con láser o usar lentes de contacto? Justifiquen su respuesta.

b) Representen cada una de las probabilidades que menciona el texto en la forma en que se indica.

	1 en 100	1 en 2 000	1 en 10 000
Como fracción			
Como número decimal			
Como porcentaje			

i. ¿Qué probabilidad es mayor (1 en 100, 1 en 2 000 o 1 en 10 000)?

ii. ¿Qué criterios emplearon para determinarlo?

iii. ¿Cómo interpretan que una de las probabilidades es mayor que las otras?

Oriéntate

La cirugía ocular con láser es una técnica quirúrgica que busca corregir o eliminar los defectos visuales causados por miopía, hipermetropía o astigmatismo.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no se desarrolle una infección con el uso de lentes de contacto? Exprésenla como fracción, como número decimal y como porcentaje.

	Probabilidad de no desarrollar una infección grave por el uso de lentes de contacto
Como fracción	
Como número decimal	
Como porcentaje	

i. ¿Cuál es la suma de la probabilidad de desarrollar una infección grave con la probabilidad de no desarrollarla, cuando éstas se representan como fracción?

ii. ¿Y si se suman cuando están representadas como número decimal?

iii. ¿Y cómo porcentaje?

d) Discutan con el grupo sus respuestas. Analicen cómo interpretan los resultados que obtuvieron al hacer las tres sumas indicadas. Comenten si, a partir de la lectura, se puede concluir que es poco recomendable usar lentes de contacto o llevar a cabo una cirugía láser en los ojos.

[1] Adaptación de Salynn Boyles, "Lasik surgery: safer than contacts?", en *Web MD*, 10 de octubre de 2006, disponible en www.webmd.com/eye-health/news/20061010/lasik-surgery-safer-than-contacts (Consulta: 14 de julio de 2013).

2. Reúnete con dos compañeros. Efectúen lo que se solicita y justifiquen sus respuestas en el cuaderno.

En otro artículo Karina leyó que 7.4% de la población española de entre 12 y 65 años utiliza lentes de contacto. Este porcentaje representa a 2.5 millones de personas, del cual 59% son mujeres.[2]

a) Para el estudio del que se obtuvieron los datos se entrevistó a 2 621 personas. ¿Cuántas respondieron que son usuarias de lentes de contacto? ____________

b) ¿Cuántas mujeres respondieron que usan lentes de contacto? ____________

c) ¿Cuántos hombres respondieron que usan lentes de contacto? ____________

d) Si se entrevista a una persona en España, cuya edad esté entre 12 y 65 años, ¿cuál es la probabilidad, aproximadamente, de que sea mujer y use lentes de contacto? ____________

e) ¿Cuál es la probabilidad de que esa persona no use lentes de contacto? ____________

f) Se quiere modelar esta situación aleatoria con una urna y con bolas de colores (7.4% de la población española es usuaria de lentes de contacto, del cual 59% son mujeres). Expliquen cómo lo harían.

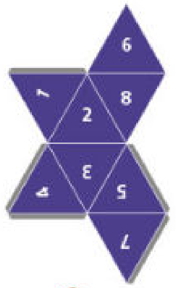
g) Con el grupo y con la ayuda del profesor, comparen los procedimientos que usaron para responder, en particular comenten cómo diseñaron el experimento aleatorio en el inciso f); argumenten y escriban sus conclusiones.

Un paso adelante

3. Reúnete con un compañero. Efectúen lo que se indica.

a) Consideren el siguiente experimento aleatorio. Se lanzan dos dados octaédricos como el que se muestra. Un dado es azul y el otro es rojo. Completen la tabla con todos los resultados posibles. Escriban las probabilidades que se piden con un número en forma decimal.

Dado rojo / Dado azul	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2		(2, 2)						
3								
4								
5								
6								
7							(7, 7)	
8								



i. ¿Cuántos resultados posibles hay? ____________

ii. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado azul se obtenga 4 y en el dado rojo, 7? ____________

iii. ¿Cuál es la probabilidad de que en cada dado se obtenga un número par? ____________

[2] Tomado de Andrés Martín, "Usuarios de lentes de contacto", p. 29, disponible en www.longitudeonda.com/wp-content/uploads/2011/11/RdPEstudio-Usuarios-Lentes-Contacto.pdf (Consulta: 14 de julio de 2013).

iv. ¿Cuál es la probabilidad del evento: "en el dado azul se obtiene 3 y en el dado rojo 10"? ______

v. ¿Cuál es la probabilidad de que en cada dado se obtenga un número menor que 9? ______

vi. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Discutan las siguientes preguntas y escriban sus conclusiones: ¿existe algún evento cuya probabilidad sea igual a 2? ¿Existe algún evento cuya probabilidad sea igual a 1? ¿Existe algún evento cuya probabilidad sea igual a 0? Posteriormente, lean la información.

Cuando se efectúa un experimento aleatorio, el **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles. Un **evento** está formado por varios resultados posibles, por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado octaédrico, el espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, algunos eventos son A: "cae número 3", A = {3}, o B: "cae un número mayor o igual a 7", B = {7, 8}.

Cada resultado posible también puede llamarse **evento simple**. En el ejemplo, el evento A es un evento simple. Un evento simple se compone de un resultado posible del experimento aleatorio.

Para determinar la probabilidad de un evento se calcula la razón entre los resultados favorables a éste y el total de resultados posibles. La probabilidad de un evento se denota con la letra P.

Por ejemplo, $P(A) = \frac{1}{8} = 0.125$; $P(B) = \frac{2}{8} = 0.25$

Para cualquier evento, su probabilidad de ocurrir varía entre cero y uno. Si la probabilidad de un evento es cero, se refiere a un **evento imposible**; si su probabilidad es uno, corresponde a un **evento seguro**.

La medida de la probabilidad de un evento puede representarse mediante una fracción, una expresión decimal o un porcentaje.

b) Reúnete con dos compañeros. Determinen la probabilidad de ocurrencia de cada evento, al lanzar los dos dados y observar el resultado que se obtiene en cada dado.

A: "la suma es mayor o igual a 5" ______ B: "la suma es menor o igual a 4" ______

C: "la suma es un número primo" ______ D: "cae un múltiplo de 3 en el dado azul" ______

E: "la suma es 16" ______ F: "el producto es 23" ______

G: "la suma es un número mayor a 1" ______ H: "cae un número par en el dado rojo" ______

c) Consideren los eventos **A** a **H**. Respondan en su cuaderno.

i. Identifiquen los eventos simples, seguros o imposibles.

ii. ¿Cuáles son los resultados favorables al evento "no ocurre el evento A"? ¿Cuál es su probabilidad? Expliquen en su cuaderno.

iii. ¿Cuáles son los resultados favorables al evento "no ocurre el evento F"? ¿Cuál es su probabilidad? ¿Tiene relación con la probabilidad del evento **F**? Expliquen en su cuaderno.

d) Comparen sus resultados con los del grupo. Con la ayuda del profesor, analicen y respondan qué significado pueden asociarle al hecho de que la medida de probabilidad de un evento sea un valor muy cercano a cero. Registren sus conclusiones.

Profundiza

4. Reúnete con dos compañeros. Lean la información y respondan de acuerdo con los eventos que se plantearon en el inciso c) de la actividad 3.

Dos eventos o más son **complementarios** cuando no tienen resultados comunes entre sí y, además, todos los resultados posibles del espacio muestral están presentes en esos eventos.

Por ejemplo, en el caso del lanzamiento de un dado octaédrico, los eventos A_1 = {2, 3, 5, 6, 7, 8} y A_2 = {1, 4} son complementarios, ya que no tienen resultados posibles en común y entre los dos contienen a todos los resultados posibles que forman el espacio muestral.

a) ¿Cuál es el evento complementario del evento **C**? ______

b) ¿Cuál es el evento complementario del evento **E**? ______

c) Se sabe que la probabilidad de un evento **H** es P(**H**). ¿Cómo se calcula la probabilidad del evento complementario a **H**? Justifiquen su respuesta. ______

______

______

5. Reúnete con dos compañeros. Indiquen, para cada experimento aleatorio, cuál es el espacio muestral y planteen dos eventos que sean complementarios.

a) Lanzar una moneda y un dado octaédrico

b) Lanzar cuatro monedas

c) Extraer una bola de una urna que contiene 12 bolas amarillas, siete bolas rojas y tres bolas azules. Devolver la bola y luego extraer otra

d) Comparen sus respuestas de las actividades 4 y 5 con las de sus compañeros. Escriban una conclusión sobre su respuesta en el inciso c) de la actividad 4.

TIC

Descarga el documento en www.redir.mx/matret3-053a. Encontrarás información sobre la probabilidad y el espacio muestral. Léela y compárala con la que estudiaste en la lección.

Ingresa a www.redir.mx/matret3-053b. Calcula las probabilidades. Si tienes dificultades, revisa la actividad 3 y los recuadros de información de esta lección.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 9 en la bitácora de la página 67.

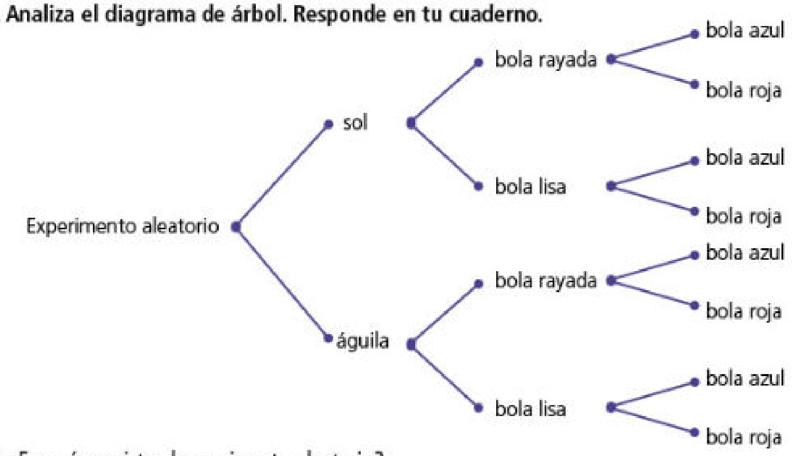
Eje: manejo de la información
Tema: nociones de probabilidad

Contenido

Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

Eventos y experimentos aleatorios

1. Analiza el diagrama de árbol. Responde en tu cuaderno.



a) ¿En qué consiste el experimento aleatorio?

b) El evento "se extrae una bola azul", ¿es un evento simple?

c) ¿Cuántos eventos simples hay en el experimento aleatorio?

d) Haz una lista con todos los eventos simples que conforman el espacio muestral de este experimento. Indica la probabilidad de cada uno.

e) ¿Cuál es la suma de las probabilidades de todos los eventos simples? ________ Explica por qué ocurre esto para cualquier espacio muestral.

f) Escribe el evento complementario en cada caso y calcula las probabilidades que se piden.

Evento A **"Se extrae una bola rayada"**	P(A) = ________
Evento complementario (B):	P(B) = ________

Evento C **"Cae águila y se extrae una bola rayada"**	P(C) = ________
Evento complementario (D):	P(D) = ________

g) Indica, en tu cuaderno, cuál es la probabilidad del evento **F**: "sale águila en la moneda" y la del evento **G**: "se extrae una bola roja". Explica si los dos eventos pueden ocurrir al mismo tiempo al efectuar una vez el experimento aleatorio. Justifica tu respuesta.

h) Compara tus respuestas con las del grupo. Comenten cómo obtuvieron los eventos complementarios de los eventos **A** y **C**. Analicen la siguiente situación. Al efectuar el experimento cuatro veces, siempre salió bola rayada. Expliquen, individualmente y en su cuaderno, qué es más probable que se obtenga en la quinta extracción, ¿bola rayada o bola lisa? Anoten una conclusión entre todos.

Un paso adelante

2. Trabaja con un compañero. Respondan en su cuaderno.

a) Determinen el espacio muestral de lanzar al mismo tiempo un dado regular (seis caras) y una ficha con una cara roja y otra azul.

b) Completen la tabla con lo que se pide.

Evento		**Probabilidad**
Evento **A**: "cae un número múltiplo de dos y cara azul".	**A** = {(2, azul), (4, azul), (6, azul)}	P(**A**) = ________
	B = {(2, roja), (4, roja), (6, roja)}	
Evento **C**: "cae un número mayor o igual a 3 y cara roja".		
Evento **D**: "cae un número impar y cara azul".		
	E = {(1, roja), (2, roja), (3, roja), (4, roja), (5, roja), (6, roja)}	
Evento **F**: "cae un número primo y cara verde".		
Evento **G**: "cae cualquier número y cualquier color de cara".		

c) Al efectuar una vez el experimento se obtuvo el resultado (5, azul). ¿Qué eventos ocurrieron?

d) Al hacer otra vez el experimento se obtuvo el resultado (4, roja). ¿Qué eventos ocurrieron?

e) ¿Cuáles son los resultados en común de los eventos **A** y **D**? ¿Estos dos eventos son complementarios? Justifica tu respuesta.

f) ¿Cuáles son los resultados en común de los eventos **B** y **C**? ¿Estos dos eventos son complementarios? Explica tu respuesta.

g) Analicen la primera y segunda columnas de datos; escriban tres parejas de eventos que no compartan resultados posibles.

h) ¿Qué significado pueden asociar al hecho de que dos eventos tengan elementos comunes?

i) ¿Con qué resultados posibles ocurren al mismo tiempo los eventos **B** y **E**? Justifica tu respuesta.

j) ¿Pueden darse al mismo tiempo los eventos **A** y **B**? Explica tu respuesta.

3. Trabaja en pareja, lean la información y respondan.

En un experimento aleatorio, si dos o más eventos no tienen elementos comunes, se dice que los eventos son **mutuamente excluyentes**. En ese caso, los eventos no pueden ocurrir de manera simultánea.

a) Observen el diagrama de árbol de la actividad 1 y escriban dos eventos que sean mutuamente excluyentes.

Los eventos ______________ y ______________ son mutuamente excluyentes porque ______________________________
____
______________________________.

b) Identifiquen los eventos mutuamente excluyentes en la tabla de la actividad 2.

c) Comenten sus respuestas de las actividades 2 y 3 con el grupo, y verifiquen que sean correctas. Entre todos, determinen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Escriban una justificación en cada caso.

i. Dos eventos complementarios son también mutuamente excluyentes.

ii. Dos eventos mutuamente excluyentes son también complementarios.

4. Trabaja en pareja, respondan y justifiquen en su cuaderno.

a) Se tiene una urna con tres bolas del mismo tamaño: dos azules y una blanca. El experimento aleatorio consiste en extraer una bola de la urna, registrar su color y regresarla a la urna.

i. Al extraer una bola, ésta es azul. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga una bola azul al repetir el experimento? Expliquen.

ii. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos bolas blancas si se hacen dos extracciones?

iii. Se hacen dos extracciones. Se sabe que en la primera se obtuvo una bola azul. ¿Cuál es la probabilidad de que en las dos extracciones las dos sean blancas?

iv. ¿Cambió la probabilidad en los incisos ii y iii? Expliquen.

v. Se hacen dos extracciones. Se sabe que en la primera se obtuvo una bola azul. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea azul?

vi. ¿Cambió la probabilidad en los incisos i y v? Expliquen.

b) Lean la información.

Cuando la probabilidad de un evento no es afectada por el resultado de otro, ambos son eventos **independientes**.

Oriéntate

En un experimento aleatorio no se sabe de antemano qué ocurrirá. Sin embargo, en las mismas condiciones, las probabilidades de cada resultado no varían.

c) Comenten por qué, en el caso del experimento anterior, los eventos A: "la primera bola es azul" y B: "las dos bolas son blancas", no son eventos independientes.

d) Mencionen por qué los eventos C: "la primera bola es azul" y B: "la segunda bola es azul" sí son eventos independientes.

e) Comparen sus respuestas de los incisos c) y d) con las de sus compañeros. Escriban qué dificultades tuvieron para determinarlas y lleguen a una conclusión.

Profundiza

5. Haz la tabla en tu cuaderno y complétala. Posteriormente, responde las preguntas.

Experimento aleatorio	Espacio muestral	Tres ejemplos de eventos mutuamente excluyentes	Tres ejemplos de eventos complementarios
1. Lanzar dos monedas			
2. Lanzar dos dados octaédricos			
3. Lazar tres fichas (cada ficha tiene una cara roja y otra azul)			

a) Para el experimento 1, los eventos A = {AS} y B = {SA, SS} son ejemplos de eventos…
____

b) Para el experimento 2, los eventos A = {(1,7)} y B = {(6,4)} son ejemplos de eventos…
______________ y ______________

c) Escribe un ejemplo de un evento seguro y uno imposible para el experimento 3. ______________
____

d) Compartan, con el grupo, cada propuesta. Justifiquen con argumentos o ejemplos. Escriban una conclusión sobre las características de los eventos mutuamente excluyentes, complementarios e independientes. Describan las similitudes y las diferencias entre ellos.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-057a. Encontrarás información sobre los eventos en probabilidad. Léela y efectúa los ejercicios. Escribe tus conclusiones en el cuaderno. Si tienes dudas, coméntalas con el profesor.

Ingresa a www.redir.mx/matret3-057b. Trabaja con un compañero. Efectúen las actividades y escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 10 en la bitácora de la página 67.

La probabilidad de que ocurra un evento es de 0.010%. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra? Expresa ambas probabilidades con un número en forma decimal.

Eje: manejo de la información
Tema: análisis y representación de datos

Contenido

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación

La encuesta de atención a usuarios

Javier decidió contratar un paquete de internet de banda ancha. A los pocos días de uso, notó importantes fallas en el servicio, por lo que acudió al centro de atención de la empresa. Después de dos horas y media de espera, le aseguraron que la señal tardaría en regresar por lo menos cinco días hábiles. Javier acudió con el gerente de la sucursal y se quejó por **el tiempo de espera, la falta de claridad en la información y los altos costos del servicio**. El gerente le pidió que llenara la encuesta de satisfacción a usuarios, y que dejara por escrito sus inconformidades.

1. Reúnete con dos compañeros. Efectúen lo que se pide y respondan en su cuaderno.

a) Comenten si ustedes, o algún familiar, han vivido una experiencia similar. Expliquen lo que hicieron al respecto y si se les ofreció contestar alguna encuesta de atención a usuarios.

b) Revisen la encuesta de satisfacción a usuarios que respondió Javier.

Marca con una ✔ el rubro que mejor califique cada aspecto en relación con el servicio prestado y con la atención recibida	Excelente	Bueno	Regular	Malo
1. El tiempo de espera fue…				
2. La claridad de la información respecto a las condiciones de uso de la banda ancha es…				
3. El asesor aclaró sus dudas acerca de costos, funcionamiento y pagos de la banda ancha de manera…				
4. El asesor resolvió el problema de manera…				
5. Los costos del servicio son los adecuados, ya que la calidad de la banda ancha es…				

c) ¿Qué piensan de los rubros propuestos? ¿Ayudarán a otros usuarios en los mismos problemas o dificultades? Justifiquen su respuesta.

d) Seleccionen la descripción más adecuada para el tipo de personas que responden la encuesta.

i. Los usuarios de la compañía que se quejan por fallas en el servicio

ii. Los mexicanos que tienen acceso a internet de banda ancha

iii. Los usuarios de la compañía que acuden a la sucursal

iv. Los habitantes de una población que tienen acceso a internet de banda ancha

e) A final de mes, el gerente debe presentar un informe con los datos recabados en las encuestas de satisfacción a usuarios. Indiquen cómo reuniría la información para cada caso.

i. Analizar el servicio prestado por uno de los asesores

ii. Analizar el servicio prestado por todos los asesores del centro de atención

iii. Analizar la calidad del servicio de internet de banda ancha

f) Compartan sus respuestas con sus compañeros. Discutan cómo seleccionaron el tipo de población que responde la encuesta. Registren sus acuerdos.

Oriéntate

Las encuestas de satisfacción a usuarios ayudan a detectar lo que les gusta o desagrada a los clientes, y las posibles áreas de mejora.

Un paso adelante

2. Trabaja con dos compañeros. Lean la información y hagan lo que se pide.

De acuerdo con los resultados de una encuesta llevada a cabo por el Inegi en 2012, se reporta que 45.1 millones de personas son usuarios de internet en México.[1]

a) Para evaluar los datos de una encuesta, es necesario determinar cuál es la población a la que se dirigió ésta. En el caso del dato que reporta el Inegi, ¿cuál es la población del estudio? Justifiquen su respuesta en el cuaderno. __________

b) Observen los datos en la tabla.

Usuarios de internet por lugar de acceso y disponibilidad de computadora en su hogar, 2009 a 2012					
Año	Total nacional	Acceden a internet en su hogar	Acceden a internet fuera de su hogar: Total	Su hogar tiene computadora	Su hogar no tiene computadora
2009	28 439 250	13 201 930	15 237 320	4 259 603	10 977 717
2010	34 871 724	16 922 047	17 949 677	3 968 185	13 981 492
2011	40 605 959	21 133 179	19 472 780	3 729 583	15 743 197
2012	45 108 655	22 489 854	22 618 801	3 498 718	19 120 083

c) Dentro del total de personas que acceden a internet fuera de su hogar, algunos sí tienen computadora en su domicilio. ¿Por qué ocurre esto? __________

d) Escriban tres conclusiones a partir de los datos de la tabla.

i. __________

ii. __________

iii. __________

e) Seleccionen la opción que les parezca más adecuada para presentar los datos de la tabla en una gráfica. Justifiquen en el cuaderno su elección.

i. Histograma

ii. Gráfica de barras

iii. Polígono de frecuencias

iv. Gráfica de sectores

f) Grafiquen los datos, en una cartulina, de acuerdo con la gráfica que seleccionaron.

g) Para recolectar los datos, el Inegi no aplicó la encuesta a toda la población, sino sólo a una muestra del universo de estudio. Expliquen en su cuaderno por qué ocurre esto.

h) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten las características de los cuatro tipos de gráfica que se mencionan. Escriban una conclusión sobre su respuesta en el inciso g).

Oriéntate

El Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi) fue creado el 25 de enero de 1983 como el órgano central para captar, procesar y difundir información acerca del territorio, la población y la economía. Su sede está en la ciudad de Aguascalientes.

[1] Tomado de Inegi, *Usuarios de internet en México*, México, 2011, disponible en www.inegi.gob.mx/est/contenidos/espanol/temas/Sociodem/notatinf212.asp (Consulta: 14 de julio de 2013).

3. Analiza la información. Responde y justifica en tu cuaderno.

Liliana es trabajadora social en una escuela secundaria. Entre otras funciones, imparte pláticas a los alumnos sobre la prevención de adicciones. Para preparar su plática, consultó la Encuesta Nacional de Adicciones 2011. Leyó que el objetivo general de la encuesta es:

> Estimar las prevalencias del uso y abuso de tabaco, alcohol y drogas, [...]; y evaluar las tendencias de su consumo en la población adolescente de entre 12 y 17 años de edad y en la población adulta de entre 18 y 65 años. Uno de tres objetivos específicos es identificar los grupos de población con mayor riesgo de consumo de tabaco, alcohol y drogas.[2]

a) ¿Cuál es la población a la que se aplicó la encuesta?

b) ¿Los resultados de la encuesta le servirán a Liliana? ¿A qué otro tipo de personas o de público le será de utilidad conocer los resultados de la Encuesta Nacional de Adicciones?

c) El estudio se llevó a cabo en un número determinado de viviendas seleccionadas en forma aleatoria. ¿Por qué se hace la selección de esta manera?

d) De las personas encuestadas, ¿cómo debe ser la proporción entre hombres y mujeres?

e) Para una encuesta de este tipo, ¿sería correcto que 70% de los encuestados estuvieran en el rango de edad de entre 12 y 17 años, y el resto entre los 18 y 65 años?

f) Explica qué entiendes por cada concepto.

i. Población ii. Muestra iii. Muestra representativa iv. Muestra no representativa

g) Discute y comenta tus respuestas con tus compañeros. Guiados por su profesor, registren sus conclusiones respecto a las definiciones que escribieron en el inciso f). Entre todos determinen la veracidad de los enunciados que se proponen; en cada caso presenten ejemplos.

Enunciado	Veracidad
Una población es un grupo con características únicas.	
Una población puede o no ser de personas.	
Las poblaciones ofrecen información cuantificable, con base en la cual se establecen generalizaciones.	
Una muestra no siempre es representativa.	
Una muestra es un ejemplo de población.	

Profundiza

4. Trabaja con dos compañeros. Diseñen una encuesta de diez preguntas acerca de la prevención de adicciones. Registren en una tabla lo que se indica. Respondan y justifiquen en su cuaderno.

Objetivo de la encuesta	
Población	
Características de la muestra	
Periodo de realización	
Forma de presentar los resultados	

[2] Secretaría de Salud, *Encuesta Nacional de Adicciones 2011*, México, disponible en www.spps.gob.mx/spps-ena-2011.html (Consulta: 14 de julio de 2013).

a) Al diseñar la encuesta, ¿consideraron a todos los alumnos de su escuela secundaria?, ¿consideraron alumnos de un turno, de ambos turnos, o de otras escuelas secundarias?, ¿consideraron sólo alumnos, sólo alumnas o ambos?

b) ¿Es factible completarla en el tiempo que calcularon? ¿Cuántos días les llevará aplicar la encuesta? Para aplicarla, ¿requerirán la colaboración de más personas o con ustedes será suficiente?

c) Para reportar los resultados, ¿qué formato consideran el más conveniente? ¿Es necesario incluir gráficas? De incluirlas, ¿qué tipo es el más pertinente?

d) Lean la información.

Encuesta. Técnica de recolección de datos sobre un tema específico en una población determinada. Sus resultados se pueden cuantificar.

Población. Se trata de un grupo bien definido, es decir, que cumple condiciones específicas.

Muestra. Representa una parte de la población. Una muestra es representativa cuando considera las características relevantes de la población.

Para llevar a cabo una *encuesta*, es necesario...
1. definir el objetivo principal y, si es el caso, definir objetivos secundarios;
2. establecer el tiempo de diseño e implementación;
3. definir con claridad la población que se encuestará y seleccionar una muestra que la represente; y
4. reportar cuantitativamente los resultados obtenidos.

e) Revisen, guiados por su profesor, el diseño de su encuesta, las preguntas, así como el cronograma y aplíquenla. Después, contesten.

i. ¿Qué dificultades afrontaron al aplicarla? ¿Las dificultades fueron las mismas que en los otros equipos o fueron distintas?

ii. ¿La muestra seleccionada representa adecuadamente a la población establecida?

iii. Ahora que tienen los datos, ¿cómo consideran que deben organizarlos para su presentación?

f) Elaboren un reporte para presentar los resultados de su encuesta. Escriban ahí sus conclusiones y añadan algunas recomendaciones para diseñar y aplicar una encuesta.

g) Organicen una jornada para presentar los resultados de las encuestas de cada equipo.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-061a. Haz clic en "Diseño de estudios estadísticos", observa el video y Comenta tus dudas y conclusiones con un compañero.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 11 en la bitácora de la página 67.

Eje: manejo de la información
Tema: análisis y representación de datos

Contenido

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación

La Encuesta Nacional de Adicciones

La Encuesta Nacional de Adicciones aplicada en 2011 tiene representatividad nacional. Las poblaciones a las que se aplicó se clasificaron en rurales —cuyo número de habitantes es menor o igual a 2 500—, urbanas —las conformadas por entre 2 500 y 99 999 personas— y metropolitanas —con 100 000 habitantes o más—. Se aplicó una entrevista directa con adultos de 18 a 65 años de edad y adolescentes de entre 12 y 17 años. Se seleccionó a los encuestados mediante un muestreo aleatorio de 17 500 viviendas.[1]

1. Trabaja con un compañero. Respondan en su cuaderno. Analicen, discutan y justifiquen sus respuestas.

a) ¿Qué entienden por *representatividad nacional*?

b) Una población grande se puede estudiar recogiendo datos de una muestra de ella. ¿Cuál es la muestra de este estudio?

c) ¿Qué significa un *muestreo aleatorio*?

d) Con base en los resultados de la encuesta, es posible establecer predicciones o conclusiones acerca del comportamiento de toda la población. Expliquen por qué.

2. Lean la información y efectúen lo que se pide. Respondan en su cuaderno.

Una radiodifusora local del estado de Chiapas emitió un programa sobre cómo orientar a los hijos adolescentes. El locutor solicitó a la audiencia que llamara por teléfono para contestar algunas preguntas respecto a la calidad del programa. Al llamar se debe teclear 1 si la respuesta es *sí*, 2 para *no*, y 3 para *no sé*. Los teléfonos quedaron abiertos durante los siguientes dos días.

a) ¿Cuál es el periodo de levantamiento de la encuesta?

b) Definan la muestra y la población para la encuesta solicitada por la radiodifusora. También describan su objetivo.

c) De acuerdo con el planteamiento anterior, ¿se utilizó un muestreo aleatorio? Justifiquen su respuesta.

d) Analicen los resultados de la encuesta telefónica.[2]

Preguntas respecto a la calidad del programa	Sí	No	No sé
¿El tema fue de tu interés?	601	128	24
¿Los expertos hablaron con seriedad y en profundidad?	522	101	130
¿Te gustaría que se hicieran más programas sobre este tema?	722	17	14
¿Tus dudas fueron aclaradas?	476	240	37

e) Presenten los resultados de la encuesta en una gráfica de barras y también en varias gráficas de sectores (o circulares).

f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten cómo hicieron las gráficas y cuáles son las ventajas y desventajas de cada tipo.

[1] Tomado de Secretaría de Salud, *Encuesta Nacional de Adicciones 2011*, México, disponible en www.spps.gob.mx/spps-ena-2011.html (Consulta: 14 de julio de 2013).
[2] Elaboración propia.

Un paso adelante

3. Trabaja con dos compañeros. Analicen la información. Efectúen lo que se indica. Respondan y justifiquen en su cuaderno.

En cierta universidad se elaborará una encuesta para evaluar las necesidades y los requerimientos de los usuarios de la biblioteca. El número de estudiantes y de profesores se muestra en la tabla.[3]

Facultad	Estudiantes	Profesores	Total
Derecho	8 994	559	9 553
Medicina	4 728	199	4 927
Ciencias Políticas	5 201	217	5 418
Administración	6 124	356	6 480
Ciencias	2 275	490	2 765
Psicología	3 038	108	3 146
TOTALES	30 360	1 929	32 289

a) ¿A qué población se dirige la encuesta?

b) Escriban cinco preguntas que les parezcan relevantes para la encuesta.

c) Revisen la tabla. En ella se presenta el número de personas a las que se piensa entrevistar.

Facultad	Estudiantes	Profesores	Total
Derecho	252	93	345
Medicina	139	74	213
Ciencias Políticas	145	78	223
Administración	166	85	253
Ciencias	93	90	187
Psicología	96	61	157
TOTALES	891	481	1 378

d) ¿Cuántos estudiantes y cuántos profesores hay en la población?

e) ¿Cuántos estudiantes y cuántos profesores hay en la muestra?

f) Comparen los datos de la muestra con los de la población.

i. Analicen la primera columna. ¿Cuál es la relación entre el número de estudiantes que se entrevistará en cada facultad y el número de estudiantes inscritos en ellas?

ii. ¿Qué ocurre en el caso del número de estudiantes a quienes se entrevistará en Ciencias y Psicología? Expliquen por qué sucede esto.

iii. ¿Qué ocurre con el número de profesores que se entrevistará respecto al número de alumnos? Expliquen por qué sucede esto.

g) Describan un método con el que se puede seleccionar la muestra de manera aleatoria y uno en el que no sea aleatoria.

h) Discutan en grupo las ventajas y desventajas de utilizar un muestreo aleatorio. Comenten sus argumentos y registren sus acuerdos.

[3] Elaboración propia.

Profundiza

4. Analicen la situación. Respondan y justifiquen en sus cuaderno.

a) En un club de buceo, el entrenador quiere investigar cuántos estudiantes estarían en condiciones de viajar a Baja California y hacer sus prácticas en los arrecifes de coral. Para ello se reúne con tres entrenadores más y se organizan para elaborar las preguntas. Dado el tiempo con el que cuentan, deciden usar una muestra de la población de alumnos. Cada uno de los entrenadores explicó su método.

Entrenador A. Entrevistará únicamente a los alumnos que viajarán con él en una salida de prácticas.

Entrenador B. Entrevistará a cada quinto alumno que ingrese a la escuela en el horario vespertino durante dos días de la semana.

Entrenador C. Entrevistará a alumnos voluntarios a la hora de la salida, tres días en el horario matutino y dos días en el vespertino.

Entrenador D. Entrevistará a alumnos seleccionados al azar de cada grupo de buceo.

i. ¿Qué metodología seleccionarían ustedes?

b) Consideren el método del entrenador A.

i. Este método se conoce como *muestreo de conveniencia*, ¿por qué se llama así?

ii. ¿Con este método se consigue una muestra representativa?

c) Consideren el método del entrenador B.

i. A este método se le conoce como *muestreo sistemático*, ¿por qué se llama así?

ii. Si se incluyera a los alumnos del turno matutino, ¿se obtendría una muestra representativa con este método?

d) Consideren el método del entrenador C.

i. Este método también es un tipo de *muestreo de conveniencia* y depende de la disposición de los entrevistados. ¿Esto constituye una ventaja o una desventaja al aplicar una encuesta?

e) Consideren el método del entrenador D.

i. ¿Cuáles son los inconvenientes de este método?

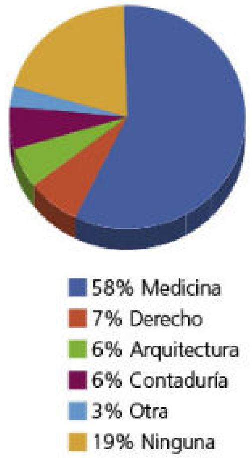
ii. ¿Con este método se consigue una muestra representativa?

f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros e intercambien argumentos. Lean la información y hagan lo que se pide.

Cuando un método de muestreo no representa adecuadamente una población se le llama *muestreo sesgado*. Revisen los planteamientos de las actividades 2 y 3, en cada caso determinen si las muestras son representativas o sesgadas. Registren sus conclusiones.

5. Analiza las situaciones. Responde y justifica en tu cuaderno.

a) La gráfica representa los resultados de una encuesta aplicada a 279 personas.[4]



i. ¿Se puede saber cuántas mujeres contestaron la encuesta?

ii. ¿Qué clase de datos se pueden conocer con el tipo de gráfica mostrada?

iii. ¿Se puede determinar la población, la muestra y el objetivo de la encuesta con sólo analizar la gráfica circular?

b) La tabla muestra los resultados de una encuesta hecha en Estados Unidos de América respecto al total de usuarios de una red social.[5]

Rango de edad	Total de usuarios	Hombres	Mujeres
13-17	14 402 580	6 646 820	7 719 380
18-25	50 679 700	23 004 960	27 048 020
26-34	29 703 340	13 588 320	15 577 380
35-44	23 596 860	10 216 440	12 775 140
45-54	17 425 520	6 915 900	10 176 980
55-64	10 459 580	3 982 340	6 301 480

i. ¿Se puede determinar la población, la muestra y el objetivo de la encuesta con sólo analizar el registro tabular?

ii. Indica en tu cuaderno una propuesta sobre el número de usuarios que considerarías en cada categoría para hacer una muestra de esta población.

c) Compara los registros anteriores. ¿Qué diferencias y semejanzas identificas entre ellos?

d) ¿En qué casos es conveniente usar gráficas para representar la información o los resultados de una encuesta?

e) ¿En qué casos es más adecuado usar tablas o registros tabulares para mostrar la información obtenida al aplicar una encuesta?

f) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Escriban una conclusión sobre el uso de los diferentes tipos de gráficas y registros. Registren cuáles fueron los logros y las dificultades que tuvieron en las lecciones 11 y 12.

[4] Elaboración propia.
[5] Tomado de "Facebook Demographics Revisited", *Social Media Today*, 7 de mayo de 2011, disponible en socialmediatoday.com/kenburbary/276356/facebook-demographics-revisited-2011-statistics (Consulta: 14 de julio de 2013)

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-065a. Resume en tu cuaderno las principales características de los distintos tipos de gráfica.

Ingresa a www.redir.mx/matret3-065b. Haz las actividades. Describe en tu cuaderno los conceptos que se te dificultaron más.

Para hacer una encuesta sobre una población de 13 275 habitantes, se seleccionó una muestra de 310 personas. ¿A qué porcentaje de la población corresponde la selección? Explica en tu cuaderno por qué no es conveniente usar ese porcentaje para una población de 500 habitantes.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 12 en la bitácora de la página 67.

Lección 1

a) ¿Cuál de las siguientes expresiones representa una ecuación cuadrática?

$2y + 2 = 0$ $\quad y^3 + 5 = 2$ $\quad 2y^2 = 5y$ $\quad 4y^4 - 1 = 0$

Lección 2

a) Escribe el enunciado de un problema que se pueda modelar con la ecuación $3x^2 - 6x = 45$.

____

Lección 3

a) ¿Qué se debe cumplir para que dos figuras sean semejantes? ____________

____

____

b) ¿Qué se debe cumplir para que dos figuras sean congruentes? ____________

____

____

c) ¿Qué es la razón de semejanza? ____________

____

____

Lecciones 4 y 5

a) Si dos triángulos tienen sus ángulos iguales, ¿son congruentes? ¿Por qué? ____________

____

____

____

b) Escribe F (falso) o V (verdadero).

Dos triángulos son semejantes cuando…

i. tienen dos ángulos iguales, respectivamente. ( )

ii. tienen dos lados correspondientes proporcionales. ( )

iii. tienen un ángulo igual y las medidas de dos lados son proporcionales. ( )

iv. tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo entre ellos igual. ( )

Lecciones 6 y 7

Lee el planteamiento y responde lo que se pide. Elabora, en tu cuaderno, la gráfica que corresponde.

Sebastián vende accesorios para computadora en una plaza comercial. Recibe 10% de la venta que logra hacer durante el día.

a) Un día le dieron una comisión de \$160.00. ¿Cuánto vendió ese día? ____________

b) ¿Cuánto debe vender para ganar \$1 000.00 de comisión? ____________

c) Escribe la expresión algebraica que modela esta situación. ____________

Lección 8

a) Escribe una ecuación para calcular los lados de un rectángulo de área 1 120 cm^2 sabiendo que el mayor es 3 cm más grande que el menor ____________

b) ¿Cuál es la longitud del lado menor? ________ ¿Y del mayor? ________

Lección 9

a) ¿Cuándo es posible afirmar que la probabilidad de que un evento suceda es 0? ____________

____

____

Lección 10

a) ¿Qué significa que dos eventos sean mutuamente excluyentes? ____________

____

____

Lección 11

a) ¿Qué ventajas tiene representar la información gráficamente? ____________

____

Lección 12

a) ¿Qué tipos de gráficas conoces para representar información? ____________

____

b) Haz, en tu cuaderno, un ejemplo de cada una.

La geometría del huevo

1. Reúnete con dos compañeros y lleven a cabo la actividad.

a) Investiguen las propiedades geométricas de un huevo de gallina.

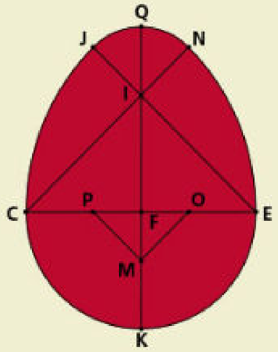
b) Identifiquen su forma y sus regularidades especiales.

c) Encuentren una respuesta del porqué el huevo tiene esa forma y no otra.

d) Tomen un huevo y midan su ancho y su alto.

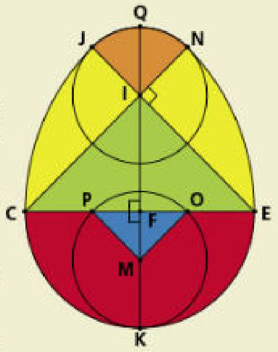
e) Compartan, con su grupo, los hallazgos de su investigación y registren sus conclusiones.

2. Lleva a cabo la actividad y responde las preguntas.
Utiliza una cartulina y construye las figuras necesarias para formar un rompecabezas con forma de huevo. Guíate por la figura.



a) ¿Qué formas geométricas identificas en el rompecabezas? ______

3. Observa la figura de la derecha y responde las preguntas.



a) ¿Cuántas circunferencias identificas? ______

b) Identifica las figuras que se forman en las circunferencias. ¿Cuáles de estas figuras son congruentes entre sí? Responde en tu cuaderno.

c) Calcula la medida de los ángulos de los triángulos verdes y de los azules. Explica, en tu cuaderno, cómo lo hiciste.

d) Respecto a sus ángulos, ¿qué tipo de triángulo es el verde y qué tipo de triángulo es el azul? ______

______

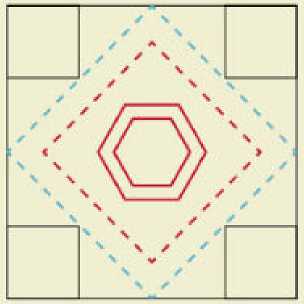
e) Los dos triángulos verdes son ______ ¿Por qué? ______

f) ¿Qué puedes decir de los azules? ______

g) ¿Qué relación puedes describir entre un triángulo azul y uno verde? ______

Triángulos semejantes y polígonos

1. Reúnete con dos compañeros, analicen el dibujo que hizo Javier del diseño de un mosaico.



a) Identifica todos los cuadrados del dibujo.

b) Marca los cuadrados que sean semejantes y los cuadrados que sean congruentes.

c) Observa los hexágonos rojos. Une los vértices de los hexágonos con el centro de ellos.

i. ¿Los triángulos formados en ambos hexágonos son semejantes? ______

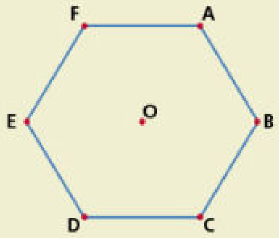
ii. ¿Qué criterio de semejanza de triángulos utilizaste? ______

iii. ¿Los hexágonos son semejantes? ______

iv. ¿Por qué? ______

______

2. Traza los segmentos $\overline{FD}$, $\overline{FB}$ y $\overline{BD}$ en el hexágono de la derecha y responde.



a) ¿Qué tipo de triángulo es el **FDB**? ______

b) ¿Qué características tienen los triángulos **DFE**, **ABC** y **CDE**? ______

______

c) ¿Estos tres triángulos son semejantes entre sí? Justifica tu respuesta en el cuaderno.

d) Traza las diagonales del rectángulo **ACDF**. ¿Los triángulos que se forman son semejantes entre sí? Justifica tu respuesta en el cuaderno.

e) El triángulo **AOF** es ______ al triángulo **FDB**. ¿Qué criterio usaste?

Justifica tu respuesta. ______

______

3. Organízate en equipos, discutan los criterios de semejanza de los triángulos y su relación con otros polígonos. Además discutan la diferencia entre semejante y congruente. Registren, en un cuaderno, sus conclusiones.

Lee con atención los planteamientos, elige la respuesta correcta y márcala en la sección de respuestas.

1. En una habitación rectangular, el lado largo mide el triple del ancho. Si el área de la habitación es de 108 m² y x representa la anchura, ¿qué igualdad es verdadera?

a) $x + 3x = 108$ b) $3x = 108$ c) $3x^2 = 108$ d) $x^2 + 3x^2 = 108$

2. Las figuras A y B son congruentes, mientras que las figuras B y C son semejantes pero no congruentes. ¿Qué afirmación es falsa?

a) A y C tienen lados proporcionales. b) A y C tienen ángulos iguales.

c) A y C son congruentes. d) A y C son semejantes.

3. ¿Qué afirmación es falsa?

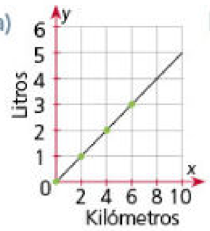
a) Para que dos triángulos sean congruentes deben tener tres lados iguales; para que sean semejantes basta con que tengan dos ángulos iguales.

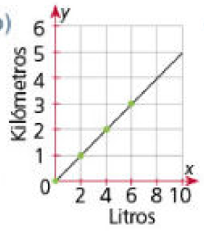
b) Los triángulos semejantes tienen lados proporcionales; los triángulos congruentes, lados de la misma medida.

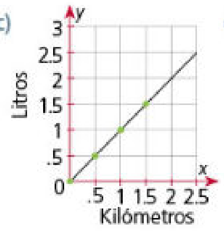
c) Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, pero el lado entre ellos no mide lo mismo en ambos, entonces los triángulos son semejantes.

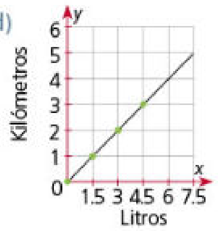
d) Los triángulos congruentes tienen ángulos iguales; los triángulos semejantes, ángulos proporcionales.

4. Una camioneta consume $\frac{1}{2}$ l de gasolina por cada kilómetro que recorre. ¿Qué gráfica representa la situación?

a)


b)


c)


d)


5. Un estudio de mercado muestra que si un artículo se ofrece en \$30.00 se venden 50 unidades diarias; pero por cada peso de descuento se venden 10 unidades más.

Descuento	\$0.00	\$1.00	\$2.00	\$5.00	\$10.00	x
Precio	\$30.00	\$29.00	\$28.00	\$25.00	\$20.00	
Unidades vendidas	50	60	70	100	150	
Ingreso	\$1 500.00	\$1 740.00	\$1 960.00	\$2 500.00	\$3 000.00	

Si x representa el descuento, ¿qué expresión corresponde al ingreso?

a) $(30 + x)(50 - 10x)$ b) $(30 + x)(50 + 10x)$ c) $(30 - x)(50 - 10x)$ d) $(30 - x)(50 + 10x)$

6. En un experimento se lanzó un objeto hacia arriba y se tomaron los datos que se indican en la tabla. Selecciona la expresión que relaciona la distancia del objeto hacia el piso y el tiempo del recorrido.

Tiempo (t)	Distancia (d)
1	16
2	24
3	24

a) $d = -2t^2 + 18$ b) $d = -4t^2 + 20t$ c) $d = -3t^2 + 17t + 2$ d) $d = 4t^2 - 12t - 8$

7. Se lanzan tres monedas y se registra el resultado: selecciona la opción en la que los dos eventos sean mutuamente excluyentes.

a) **Evento A:** "se obtienen más águilas que soles". **Evento B:** "se obtienen más soles que águilas".

b) **Evento A:** "se obtienen tres águilas". **Evento B:** "se obtienen más águilas que soles".

c) **Evento A:** "el tercer lanzamiento es sol". **Evento B:** "se obtiene al menos un águila".

d) **Evento A:** "el primer lanzamiento es sol". **Evento B:** "el segundo lanzamiento es águila".

8. Se lanzan dos dados al aire y se suman los puntos obtenidos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 7?

a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{3}{21}$ c) $\frac{6}{36}$ d) $\frac{7}{36}$

9. Se efectuó un muestreo del desempeño de 1 000 alumnos en una evaluación. Observa los resultados de la muestra.

Aciertos	0 a 4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencia	30	19	29	24	22	27	16	13	8

¿Qué se puede afirmar a partir de los datos de la tabla?

a) Sólo 188 alumnos terminaron la evaluación.

b) Sólo 21 de los 1 000 alumnos obtuvieron más de 10 aciertos.

c) Aproximadamente 20% de los alumnos obtuvieron 10 o más aciertos.

d) Aproximadamente 37% de los alumnos obtuvieron 10 o más aciertos.

10. Se preguntó a los estudiantes de secundaria de una localidad qué tipo de alimentos consumen con mayor frecuencia a la hora del descanso: 26% respondió que un sándwich o una torta; 32%, algún dulce; 14%, fruta; 37%, pan o galletas empaquetadas; y 30% frituras o papas en bolsa.
¿Qué tipo de gráfica es la más conveniente para representar estos datos?

a) Poligonal. b) De barras. c) Circular. d) Histograma.

Respuestas de la evaluación correspondiente al bloque 1

1. (A) (B) (C) (D) 5. (A) (B) (C) (D) 9. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D) 6. (A) (B) (C) (D) 10. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D) 7. (A) (B) (C) (D)
4. (A) (B) (C) (D) 8. (A) (B) (C) (D)

Lee con cuidado la situación y responde lo que se pide. Justifica tus respuestas.

Quien gana decide

Raúl y María son hermanos y se irán juntos de vacaciones a una zona colonial y a una de playa. Él quiere ir primero a la playa y después a la zona colonial, mientras que ella desea ir primero a la zona colonial y después a la playa.

Determinaron lanzar dos monedas al aire para decidir. Si el resultado es **sol-sol**, Raúl elegirá el lugar, pero si el resultado es **águila-águila**, María lo escogerá. Con cualquier **otro resultado ninguno gana** y lanzan de nuevo las dos monedas. Al momento de efectuar los lanzamientos, Raúl y María sólo tienen una moneda.

Pregunta 1. Para efectuar el lanzamiento de dos monedas, ¿es posible simularlo con una sola?

Pregunta 2. Indica si, en cada caso, la afirmación es verdadera.

a) Los eventos sol-sol y águila-águila son mutuamente excluyentes.

b) Los eventos sol-sol y águila-águila son complementarios.

Pregunta 3. ¿Es posible que Raúl y María ganen en un mismo lanzamiento?

Pregunta 4. ¿Qué es más probable que suceda?

a) Raúl ganará y decidirá cómo iniciar el viaje.

b) María ganará y decidirá cómo iniciar el viaje.

c) Ambos obtendrán otro resultado y volverán a lanzar.

d) Los tres casos son igualmente probables.

Pregunta 5. ¿Es posible que Raúl y María lancen 15 veces las monedas sin que ninguno gane? Escribe una afirmación en la que estimes qué tan probable es que esto ocurra o no.

Recaudación electrónica

El ministerio (secretaría) de recaudación hacendaria de un país anunció la puesta en marcha de la obtención, vía internet, de la cédula electrónica de identificación fiscal que contiene un código de barras con información que puede consultarse desde cualquier dispositivo móvil; la cédula servirá para hacer pagos y cobros. La decisión de habilitar este trámite por internet se tomó con base en los siguientes datos: de cada 100 personas en el país, 66.32 son mayores de 18 años, 38.42 cuenta con acceso a internet, 29.4 tiene una cuenta de correo electrónico y 74.37 posee un dispositivo móvil.

Para solicitar la firma electrónica, es necesario ingresar a la página web del ministerio, anotar el nombre y la fecha de nacimiento, el número del Registro Federal de Causantes (RFC) y los datos de domicilio y correo electrónico; inmediatamente se obtiene la cédula electrónica de identificación fiscal.

Pregunta 1. Sean los eventos E1: "Tiene cuenta de correo electrónico" y E2: "No tiene cuenta de correo electrónico", explica por qué los eventos son mutuamente excluyentes.

Pregunta 2. Sean los eventos E3: "Tiene cuenta de correo electrónico y dispositivo móvil" y E4: "Tiene más de 18 años", explica por qué los eventos no son mutuamente excluyentes ni complementarios.

Pregunta 3. Explica la diferencia entre un evento complementario, un evento mutuamente excluyente y un evento independiente. Propón dos eventos independientes con base en el experimento aleatorio de seleccionar una persona del país, al que se hace referencia en el texto.

Pregunta 4. Explica a qué porcentaje se le dio más peso para definir que la cédula electrónica se solicite por medio de internet.

Autoevaluación

Analiza tu desempeño en el bimestre y selecciona, en cada caso, la acción que mejor lo represente.

	Soy capaz de explicarlo a otros o ayudarlos.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Identificar ecuaciones cuadráticas sencillas.				
Resolver ecuaciones cuadráticas por medio de procedimientos personales.				
Analizar las propiedades de las figuras congruentes y semejantes.				
Trazar figuras congruentes y semejantes.				
Comprender y aplicar los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.				
Identificar una relación de proporcionalidad en tablas, gráficas y expresiones algebraicas.				
Representar en tablas y gráficas relaciones de variación cuadrática.				
Explicar las diferencias entre eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.				
Diseñar y comunicar los resultados de una encuesta o un estudio.				

Comenta con el profesor tus avances y dificultades.

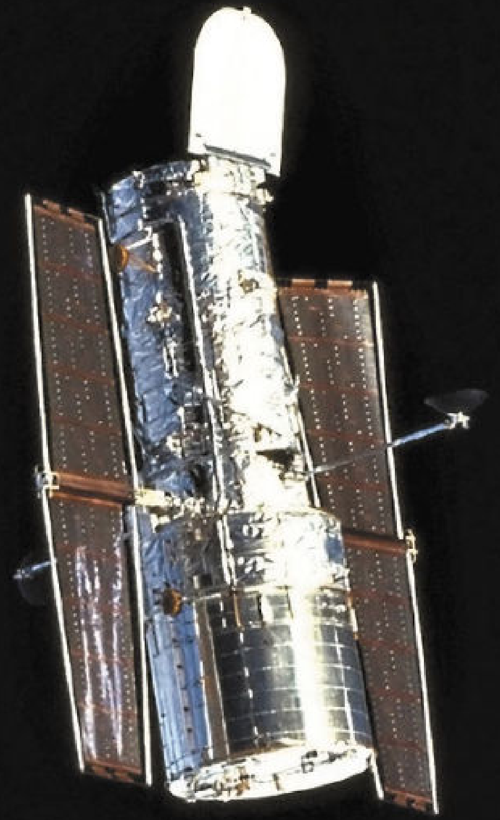
Viajes espaciales

Los viajes al espacio implican la construcción de grandes obras de ingeniería en las que interviene la matemática. Por medio de ella se planea el diseño de una estación espacial, o bien, se calcula su trayectoria antes de ponerla en órbita.

Desde el instante en que se pretende enviar hacia el espacio un satélite, un vehículo o una estación espacial y colocarlos en una órbita estable, surge una serie importante de interrogantes: ¿cuál debe ser la potencia durante el despegue para contrarrestar la fuerza de gravedad de la Tierra?, ¿en cuánto tiempo dicha potencia debe cambiar para obtener la órbita deseada y la aceleración adecuada, que se conoce como velocidad espacial?, ¿cuál es la velocidad que alcanzará una estación espacial una vez que se encuentre en su órbita?, ¿cómo mantendrá el combustible necesario para su funcionamiento?

Investiga cuántos satélites mexicanos se han enviado al espacio.

Bloque 2



Aprendizajes esperados

1. Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
2. Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: patrones y ecuaciones

Contenido

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

El proyectil y la cancha

Desde el suelo se lanza un proyectil y se quiere calcular en cuánto tiempo caerá. Su altura en metros se puede calcular usando la expresión algebraica $40t - 4t^2$, donde t representa el tiempo.

1. Reúnete con un compañero y respondan, en su cuaderno, lo que se pide.

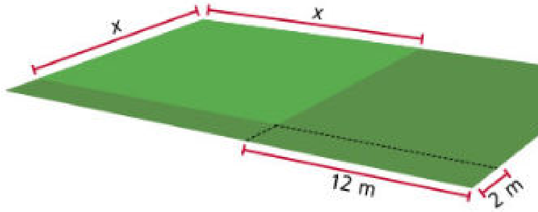
a) Si se representa con h la altura que alcanza el proyectil, ¿cuál es la ecuación con que se calcula la altura en un tiempo (t)?

b) Expliquen cómo concluyeron que ésa es la ecuación correcta.

c) Resuelvan la ecuación y expliquen su procedimiento.

2. Reúnete con un compañero. Lean la información y respondan lo que se pide.

Para hacer una cancha de futbol rápido se añadieron 2 m a uno de los lados de un terreno cuadrado y 12 m al otro lado. Al hacerlo, la superficie aumentó en 168 m^2.



a) ¿Qué expresiones algebraicas representan las medidas del largo y ancho de la cancha de futbol rápido? Escríbanlas.

Largo: ____________ Ancho: ____________

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que resulta de multiplicar el largo por el ancho? ____________

c) Representen, con una expresión algebraica, la frase "al hacerlo, la superficie aumentó en 168 m^2".

____

d) ¿Cuál es la relación entre las dos expresiones que escribieron? ____________

e) Si se quiere conocer la medida del largo y del ancho de la cancha de futbol rápido, ¿cuál es la ecuación que modela el problema? ____________

f) Resuelvan la ecuación y expliquen su procedimiento en el cuaderno.

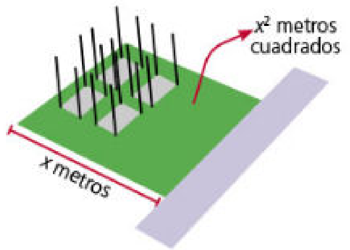
g) ¿La ecuación que resolvieron es un ejemplo de una ecuación cuadrática? Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

h) Discutan con el grupo sus procedimientos y respuestas a los problemas, guiados por el profesor. Lleguen a un acuerdo al respecto. Comenten las dificultades que afrontaron y aclaren sus dudas con las aportaciones de los demás.

Un paso adelante

3. Reúnete con un compañero, lean la información y observen la figura. Respondan lo que se indica.

Como parte del primer proyecto de una constructora se utilizará un terreno en forma cuadrangular, representado en la figura, para construir un conjunto habitacional. Los dueños saben que cuatro veces el número de metros cuadrados del área del terreno es igual a 50 veces el número de metros lineales de su perímetro.



a) Escriban la expresión algebraica que corresponde a cada afirmación.

"Cuatro veces el número de metros cuadrados del área": ____________

"Cincuenta veces el número de metros lineales del perímetro": ____________

b) ¿Qué ecuación representa lo que saben los dueños acerca del terreno? Justifiquen su respuesta.

____

____

____

c) Escriban la ecuación en la forma $ax^2 + bx = 0$. ____________
Indiquen y expliquen, en su cuaderno, los pasos para hacerlo.

d) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación? ____________

e) Escriban, en su cuaderno, el procedimiento que siguieron para resolverla.

4. Reúnete con un compañero, lean la información y efectúen lo que se indica.

a) Diego le comenta a Pamela cómo resolvió la ecuación $4x^2 - 12x = 0$:

i. Cuando la ecuación está igualada a 0, la escribo como el producto de dos factores; por ejemplo:

Se expresa $4x^2 - 12x = 0$ como $(x)($____________$) = 0$.

ii. Expliquen, en su cuaderno, por qué cuando el producto de dos factores es igual a 0 alguno de los dos debe ser 0.

iii. Si el primer factor es 0, se obtiene una solución para la ecuación $x = 0$. Si el segundo factor es 0, se encuentra otro valor de x que haga válida la ecuación. ¿Cuál es? $x =$ ____________
Expliquen, en su cuaderno, cómo se obtiene la segunda solución.

iv. Diego comenta que es necesario verificar las soluciones. Para ello sustituye los valores de x en la ecuación original. Completen la tabla para verificar la segunda solución.

Para $x = 0$	Para $x =$ ______
$4(0)^2 - 12(0) =$ $0 - 0 =$ 0	

Con esto se comprueba que los valores de x son los correctos, ya que satisfacen la igualdad.

b) Resuelvan $4x^2 = 200x$ en su cuaderno. Usen el procedimiento de factorización descrito por Diego.

i. Esta ecuación corresponde al problema que se presentó en el inciso a). Expliquen por qué.

______

ii. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación? ______

iii. ¿Las dos soluciones son coherentes con el contexto del problema? Justifiquen su respuesta.

______

iv. ¿Cuánto mide el lado del terreno cuadrangular destinado para el conjunto habitacional? ______

v. ¿Cuál es el área del terreno? ______

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Si tienen dudas, coméntenlas con su profesor y aclárenlas con las aportaciones de todos. Luego, debatan los siguientes cuestionamientos: antes de conocer el procedimiento de solución por factorización, ¿qué método emplearon en la actividad 3? ¿Qué método les parece más eficiente?

Oriéntate

Factorización. Proceso de escribir un número o una expresión algebraica en forma de producto de factores.
Por ejemplo: 8 se factoriza como (4)(2). La expresión algebraica $3x^2 + 6x$ se factoriza como $3x(x + 2)$ y $x^2 + 5x + 6$ como $(x + 2)(x + 3)$.

Profundiza

5. Planteen una ecuación para cada problema y resuélvanla.

a) El cuadrado de un número distinto de 0 es igual al triple del mismo número. ¿De qué número se trata? ______

b) El doble del cuadrado de un número diferente de 0 es igual a 15 veces el mismo número. ¿Cuál es el número? ______

c) El triple del cuadrado de un número diferente de 0 menos 12 veces el mismo número es igual a 0. ¿De qué número se trata? ______

d) Seis veces un número diferente de 0 menos tres veces su cuadrado es igual a 0. ¿Qué número es? ______

e) Reúnanse con otros dos compañeros y comparen sus soluciones. Comenten cómo resolvieron cada ecuación. Luego escriban en su cuaderno un procedimiento general para resolver ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$.

6. Reúnete con un compañero y efectúen lo que se indica.

a) Redacten un problema parecido a los anteriores y resuélvanlo.

i. Enunciado del problema: ______

______

ii. Ecuación que lo modela: ______

iii. Expliquen su proceso de solución en el cuaderno.

iv. Las soluciones son ______

b) Escriban un problema que se resuelva con la ecuación $5x^2 = 20x$.

i. Enunciado del problema: ______

______

ii. Expliquen su proceso de solución en el cuaderno.

iii. Las soluciones son ______

c) Resuelvan las ecuaciones en su cuaderno.

i. $x(2x - 2) = 0$ ii. $5x^2 - 8x = 0$ iii. $x^2 = 7x$ iv. $3x(x + 1) = 0$

7. Organicen una puesta en común acerca de los problemas que redactaron. Comenten en qué se parecen y en qué difieren. Lean la información y compárenla con las conclusiones que escribieron a lo largo de la lección.

Para resolver una ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$ se factoriza el lado izquierdo: $ax^2 + bx = x(ax + b)$.

Como $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x(ax + b) = 0$ y el producto de dos números es cero cuando alguno de ellos es cero, es decir $x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{b}{a}$ son las soluciones de la ecuación.

Por ejemplo, la ecuación $4x^2 - 12x = 0$, se puede factorizar como $x(4x - 12) = 0$. Así, sus soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-079a. Resuelve los reactivos 1 a 4 de tercero de secundaria, Matemáticas, sobre ecuaciones cuadráticas. Lee las retroalimentaciones y coméntalas con un compañero.

Explora www.redir.mx/matret3-079b. Encontrarás información sobre los tres tipos de ecuaciones cuadráticas incompletas. Revísala, escribe tus dudas en el cuaderno y preséntalas a tu profesor.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 13 en la bitácora de la página 112.

El triple del cuadrado de un número es igual a seis veces el mismo número. ¿De qué número se trata?

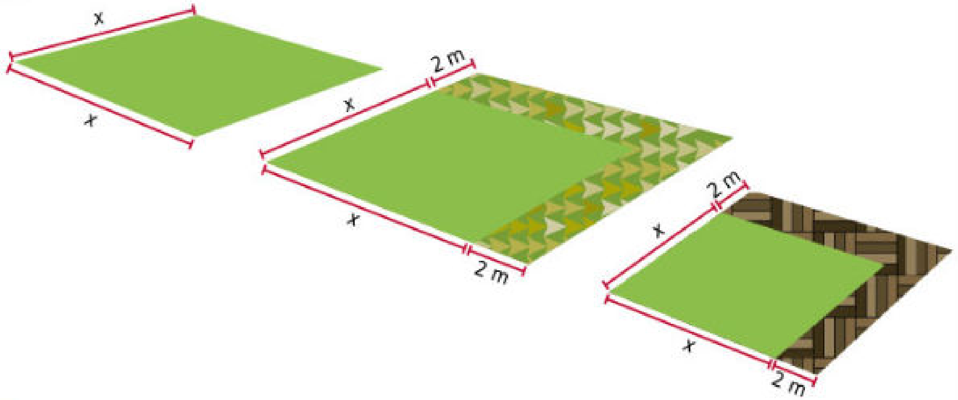
Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: patrones y ecuaciones

Contenido

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

La remodelación

En la remodelación de una casa, se hará un pasillo donde ahora está el jardín. Para hacerlo hay dos posibilidades: la primera es aumentar 2 m en dos de los lados; la otra es disminuir 2 m en dos de los lados. La forma del jardín es cuadrada. La situación se ilustra enseguida.



Oriéntate

Al resultado de elevar un binomio al cuadrado se le llama **trinomio cuadrado perfecto**. Por ejemplo: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$; el trinomio cuadrado perfecto es $x^2 + 6x + 9$.

1. Reúnete con un compañero y respondan lo siguiente.

a) Si se aumentan 2 m en dos de los lados del jardín…

i. ¿Qué expresión algebraica representa la medida de uno de sus lados? __________

ii. ¿Qué expresión algebraica representa el área del jardín? __________

b) Si disminuye 2 m la medida de dos lados del jardín…

i. ¿Qué expresión algebraica representa la medida de uno de sus lados? __________

ii. ¿Qué expresión algebraica representa el área del jardín? __________

c) Determinen si la expresión algebraica que representa el área del jardín, en cada caso, se puede expresar con un trinomio cuadrado perfecto de la forma $x^2 + bx + c$ o de la forma $x^2 - bx + c$.

Si es así, escríbanla en esta forma: __________

d) Completen la tabla determinando la expresión algebraica que representa la medida del lado de un jardín cuadrado a partir de la expresión algebraica que representa su área.

Medida de un lado del cuadrado	Expresión algebraica que representa el área del jardín
	$x^2 + 2x + 1$
	$x^2 + 4x + 4$
	$x^2 - 6x + 9$
	$x^2 + 8x + 16$
	$x^2 - 10x + 25$
	$x^2 - 20x + 100$

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Respondan si la siguiente forma de desarrollar el cuadrado de un binomio de la forma $x + a$ es correcta; si no lo es, complétenla.

a) Al desarrollar el cuadrado de un binomio, el trinomio cuadrado perfecto que resulta es…

i. el primer término del trinomio es el cuadrado de x;

ii. el segundo término es el producto de x con a, multiplicado por 2;

iii. el tercer término es el cuadrado de a.

b) Propongan una forma para determinar el binomio que se eleva al cuadrado a partir del trinomio cuadrado perfecto $x^2 - 2ax + a^2$.

Un paso adelante

3. Reúnete con un compañero para analizar cada planteamiento y hacer lo que se pide.

a) ¿Cuál es el trinomio cuadrado perfecto que resulta de desarrollar y simplificar el binomio al cuadrado $(x + a)^2$? __________

b) Señalen, entre las siguientes tres ecuaciones, qué polinomios del lado izquierdo de la igualdad son trinomios cuadrados perfectos.

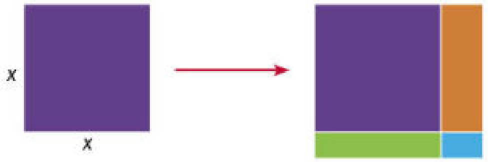
i. $x^2 + 16x + 64 = 0$ ii. $x^2 + 3x + 2 = 0$ iii. $x^2 - 12x + 36 = 0$

c) Factoricen el polinomio del lado izquierdo en las ecuaciones que señalaron, luego encuentren sus soluciones. Expliquen el procedimiento que siguieron.

d) Discutan con otra pareja sus respuestas. Con la guía de su profesor lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas. Escriban, en su cuaderno, una regla general para resolver por factorización un trinomio cuadrado perfecto.

4. Trabaja con un compañero. Analicen cada planteamiento y efectúen lo que se pide.

a) A uno de los lados de un cuadrado se le aumentan 4 cm y 2 cm al otro lado, así que se forma un rectángulo.



i. ¿Qué expresiones algebraicas representan las dimensiones del rectángulo?

Largo: ____________ Ancho: ____________

ii. ¿Con qué expresión algebraica se representa el área del rectángulo? ____________

b) El área de otro rectángulo formado de manera similar al anterior se representa como $x^2 + 9x + 18$.

i. ¿Cuántos metros se le aumentaron de largo y cuántos de ancho? Largo: ____________

Ancho: ____________

ii. Si el área de este rectángulo es de 208 cm², ¿cuántos centímetros mide de largo y cuántos de ancho? ____________ Expliquen en su cuaderno el procedimiento con que encontraron la respuesta.

iii. ¿El polinomio se puede expresar como el producto de dos binomios? ____________ En caso afirmativo, ¿cuáles son los binomios? ____________ Resuelvan el problema con sus recursos y expliquen el procedimiento en el cuaderno.

iv. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Si tienen dudas, coméntenlas con su profesor y aclárenlas con las aportaciones de otros compañeros. Debatan cómo determinar, a partir de un trinomio que no sea cuadrado perfecto, los dos binomios cuyo producto es el trinomio.

Profundiza

5. Trabaja con un compañero. Analicen la información y hagan lo que se indica.

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c$ es **factorizable** si se encuentran dos números, A y B, tales que $x^2 + bx + c = (x + A)(x + B)$; en este caso; $A + B = b$ y $AB = c$.

a) Simplifiquen la ecuación $x^2 + 9x + 18 = 208$ para llevarla a la forma $x^2 + bx + c = 0$.

b) Anoten el trinomio que obtuvieron del lado izquierdo de la ecuación en la forma factorizada $(x + A)(x + B)$. Para ello, deben encontrar dos números A y B tales que $A + B =$ ____________ $AB =$ ____________ La ecuación es ____________

c) La ecuación que obtuvieron, $(x + A)(x + B) = 0$, se resuelve si alguno de los factores es 0. Expliquen por qué en su cuaderno.

d) Igualen cada factor a 0 y despejen x en cada caso. Se obtienen dos soluciones de la ecuación.

Por lo tanto, $x_1 =$ ____________ y $x_2 =$ ____________

e) Comprueben, en su cuaderno, si con los dos valores de x se cumple la igualdad. Expliquen su procedimiento para encontrar la factorización de la ecuación.

f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Escriban, con la ayuda de su profesor, un procedimiento general para resolver ecuaciones de la forma $(x + A)(x + B) = 0$.

6. Reúnete con un compañero y hagan lo que se indica.

a) Escriban un problema que se resuelva con la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$.

i. Problema: ____________

ii. Solución del problema: ____________

iii. Expliquen el procedimiento de solución en su cuaderno.

b) Redacten un problema que se modele con una ecuación cuadrática completa y resuélvanlo.

i. Problema: ____________

ii. Ecuación que lo modela: ____________

iii. Expliquen el procedimiento de solución en su cuaderno.

iv. Las soluciones son $x_1 =$ ____________ y $x_2 =$ ____________

c) Resuelvan las ecuaciones. Expliquen, en su cuaderno, los procedimientos de solución.

i. $x^2 = -6x - 9$ ii. $x^2 - 10x + 25 = 0$ iii. $n^2 - 6 = -n$ iv. $4x^2 + 28x = 72$

7. Determina con tu grupo, en una puesta en común, en qué se parecen los problemas planteados y en qué difieren. Luego, con ayuda del profesor, debatan los pasos que se deben seguir para resolver una ecuación cuadrática por el método de factorización.

Para resolver una ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$ por el método de factorización se buscan dos números, A y B, tales que al sumarlos se obtiene b y al multiplicarlos se obtiene c.

Se obtiene la ecuación $(x + A)(x + B) = 0$, cuyas soluciones son
$x_1 = -A$ y $x_2 = -B$.

Por ejemplo, para factorizar la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$, se buscan dos números que sumados den 3 y multiplicados, -10. Estos números son 5 y -2, por lo que la ecuación factorizada es $(x + 5)(x - 2) = 0$, y las soluciones son $x_1 = -5$ y $x_2 = 2$.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-083a. Resuelve los reactivos 12 y 13 de tercero de secundaria, Matemáticas, sobre ecuaciones cuadráticas. Lee las retroalimentaciones y coméntalas con un compañero.

Explora www.redir.mx/matret3-083b. Verifica las soluciones de las ecuaciones que resolviste anteriormente con la herramienta "Cálculo automático".

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 14 en la bitácora de la página 112.

Un grupo de baile participará en un concurso regional. No todos conocen el salón en el que se celebrará la competencia, pero requieren saber cuáles son sus dimensiones para armar su coreografía. Una persona les informa que existe una pista de baile cuya área es de 40 m² y cuyo largo mide 3 m más que el ancho.

¿Cuánto mide de largo y cuánto de ancho el salón?

Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: patrones y ecuaciones

Contenido

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

El herrero

Un herrero modificará una lámina cuadrada para obtener una lámina rectangular. Para ello recorta la lámina cuadrangular como se muestra en la figura 1, y suelda los rectángulos 2 y 3 de la lámina que recortó para formar la lámina rectangular (figura 2).

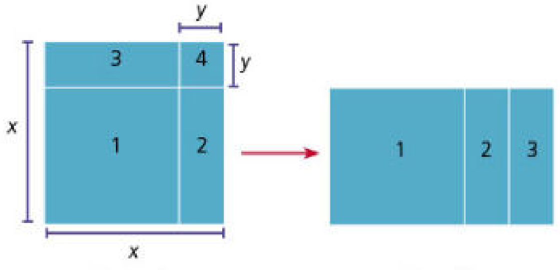


Figura 1 Figura 2

1. Reúnete con un compañero y respondan lo que se pide.

a) ¿Qué expresión algebraica representa el área del cuadrado que resulta después de cortar las partes 2, 3 y 4? ____________________

b) De acuerdo con los datos que se proporcionan en la figura 1, ¿qué expresiones algebraicas representan las medidas de los lados de la lámina rectangular (figura 2) que se forma?

Largo: ______________ Ancho: ______________

c) ¿Qué expresión algebraica representa el área de la lámina rectangular?

A = ______________

d) Escriban las expresiones algebraicas del área de cada figura.

i. Cuadrado 1 ii. Rectángulo 2 iii. Rectángulo 3

______________ ______________ ______________

e) De acuerdo con lo anterior, expliquen en sus cuadernos por qué se puede asegurar que la diferencia del cuadrado de dos números, $x^2 - y^2$, es igual al producto de su suma por su diferencia, en este caso, $(x + y)(x - y)$.

f) ¿Cuáles son las dimensiones de la lámina rectangular si su área es de 84 cm^2 y el área del cuadrado pequeño que se corta es de 16 cm^2?

Largo: ______________ Ancho: ______________

Oriéntate

Recuerda que se les llama **binomios conjugados** al producto de la suma de dos números por su diferencia; es decir de la forma

$(a + b)(a - b)$.

2. Compraren sus respuestas con las de sus compañeros. Analicen y respondan en el cuaderno.

a) ¿El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término? Expliquen su respuesta.

b) ¿La expresión $x^2 - 4^2$ es equivalente a la expresión $(x + 4)(x - 4)$? Expliquen su respuesta.

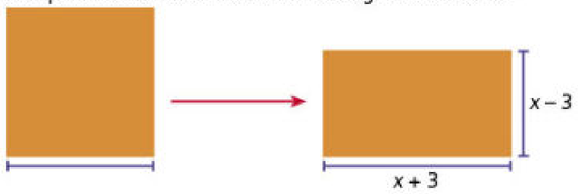
c) Si $x^2 - 4^2 = 0$, ¿qué ecuaciones permiten determinar el valor de x?

d) ¿Qué resulta al desarrollar y simplificar la ecuación $(x + 4)(x - 4) = 84$? ¿Cómo se resuelve la ecuación que resulta?

Un paso adelante

3. Reúnete con dos compañeros, analicen lo planteado en cada caso y contesten lo que se pide:

a) La figura representa el área de un cuadrado que se ha cortado y se ha transformado en un rectángulo como se hizo en la primera actividad. El área del rectángulo es de 91 m^2.



i. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado? ______________

ii. ¿Cuánto mide el largo del rectángulo? ______________

iii. ¿Cuánto mide el ancho del rectángulo? ______________

iv. ¿Las dos figuras miden lo mismo de área? ______________ ¿Por qué? ______________

b) Completen el procedimiento de Claudia para resolver el problema.

i. El área del rectángulo mide 91 m^2. Entonces se establece la siguiente ecuación:

______________ = 91

Al desarrollar la expresión del lado izquierdo se obtiene:

x^2 – ________ + ________ – 9 = 91

Se reducen los términos semejantes: ______________ = 91

Se iguala la ecuación a 0: ______________ = 0

Del lado izquierdo se obtiene una diferencia de cuadrados, ésta se factoriza como

(______________)(______________) = 0

Por lo tanto, una solución es x_1 = ______________, y la otra es x_2 = ______________

ii. Comprueben las soluciones sustituyendo los valores de x en la ecuación inicial.

iii. ¿Ambas soluciones son coherentes con el contexto del problema? ______________

¿Por qué? ______________

c) Reúnanse con otra pareja de compañeros para comparar sus respuestas. Si no coinciden, verifiquen sus procedimientos, por ejemplo, si se equivocaron al factorizar o al desarrollar el producto. Si tienen dudas, coméntenlas con todo el grupo y, con la orientación de su profesor, corrijan. Escriban una forma para resolver una ecuación cuando uno de los miembros está expresado como el producto de dos binomios conjugados.

Profundiza

4. Reúnete con un compañero para analizar el planteamiento y hacer lo que se indica.

a) Ya han estudiado las ecuaciones cuadráticas de las formas:

- $x^2 = a$
- $ax^2 + bx = 0$
- $x^2 + 2ax + a^2 = 0$
- $x^2 + bx + c = 0$

¿Cómo se resuelven ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a > 1$?

Para la ecuación cuadrática $3x^2 - 30x = 600$, hagan lo siguiente.

i. Dividan cada término de la ecuación anterior entre 3. ____________________

ii. El coeficiente del término cuadrático de la ecuación es 1. Resuélvanla y anoten las soluciones. Expliquen su procedimiento en el cuaderno.

$x_1 =$ ____________, $x_2 =$ ____________

iii. Sustituyan las soluciones obtenidas en la ecuación original, para verificar que también son soluciones de esta ecuación.

Oriéntate

Recuerda que un trinomio está formado por tres términos. Por ejemplo, los términos de $7x^2 - 2x + 7$ son $7x^2$, $-2x$ y 7.

b) Comparen sus resultados con los del resto del grupo, guiados por el profesor. Escriban un procedimiento para resolver una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

5. Reúnete con un compañero y efectúen lo que se indica.

a) Escriban una ecuación que modele cada uno de los problemas. Resuelvan la ecuación y den la solución del problema.

i. La base de un triángulo mide 6 cm más que el doble de la altura. Calculen la base y la altura, sabiendo que el área del triángulo es 300 cm².

Ecuación: ____________________

Proceso de solución: ____________________

____

Solución del problema: ____________________

ii. Para hacer las caras de una caja de 50 cm³ de volumen se cortaron, de las esquinas de una cartulina cuadrada, cuadrados de 2 cm de lado. ¿Cuánto mide el lado de la cartulina cuadrada?

Ecuación: ____________________

Proceso de resolución: ____________________

____

____

Solución del problema: ____________________

b) Redacten un problema que se modele con una ecuación de la forma $(x + y)(x - y)$ y resuélvanlo.

i. Enunciado del problema: ____________________

ii. Ecuación que lo modela: ____________________

iii. Escriban, en su cuaderno, el proceso de solución.

iv. Los valores x_1 y x_2 son ____________ Solución del problema: ____________

c) Resuelvan las ecuaciones.

i. $2x^2 - 14x = -24$ ii. $10x^2 - 30x = 100$ iii. $5n^2 - 10n = 75$ iv. $25x^2 - 50 = 250$

6. Trabajen con otra pareja. Elaboren un reporte indicando cómo resolver una ecuación cuadrática.

a) Señalen en qué consiste factorizar una ecuación para resolverla.

b) Especifiquen qué tipo de ecuaciones se pueden resolver por los métodos de factorización que trabajaron.

c) Indiquen qué es necesario hacer si el coeficiente del término cuadrático es diferente de 1.

7. Resuelve las ecuaciones cuadráticas.

a) $9z^2 = 81$ b) $16x^2 = 8x$ c) $x^2 + 12x + 36 = 0$

d) $q^2 - q - 72 = 0$ e) $(x + 6)(x - 6) = 64$ f) $100n^2 + 300n = -200$

8. Debate con el grupo la siguiente información. Propongan ejemplos y escriban una conclusión.

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ por el método de factorización, se hace lo siguiente.

- Se obtiene una nueva ecuación dividiendo cada coeficiente de la ecuación entre a.
- Se resuelve esta ecuación por el método de factorización. Las soluciones de esta ecuación son las mismas que las de la original.

Por ejemplo, la ecuación $2x^2 - 2x - 4 = 0$, al dividirla entre 2 se obtiene $x^2 - x - 2 = 0$, su factorización es $(x - 1)(x + 2) = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$, que también son soluciones de la ecuación $2x^2 - 2x - 4 = 0$.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-087a. Resuelve los reactivos 14, 15 y 16 de tercero de secundaria, Matemáticas, sobre los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas.

Explora www.redir.mx/matret3-087b. Resuelve los ejercicios para repasar tus conocimientos sobre productos notables y factorización.

Se tiene un terreno rectangular. La medida de su largo se representa como $x + 2$ y su ancho se expresa como x. La quinceava parte de su área es igual a 8 cm². ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 15 en la bitácora de la página 112.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: figuras y cuerpos

Contenido

Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

Arte huichol: transformación de figuras

Metzery vive en Nayarit; su nombre, de origen huichol, significa "luna". Ella está enseñando a otros huicholes a usar la chaquira para elaborar una artesanía como la que se muestra, denominada *canasto huichol.*

1. Observa la imagen. Responde en tu cuaderno.

a) ¿Qué figuras o formas geométricas identificas alrededor del canasto? ¿Cuáles se repiten?

b) ¿Algunas figuras en el canasto son simétricas entre sí? Justifica tu respuesta.

c) Observa el modelo geométrico de uno de los motivos o las figuras que se utilizarán. Metzery les dice a sus aprendices: "Se ha trasladado el motivo y se obtuvo otro igual". En la figura 1, traza la mediatriz al segmento $\overline{BD'}$.

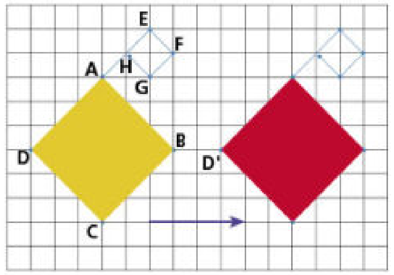


Figura 1

d) ¿El motivo amarillo y el rojo son simétricos respecto a la recta que trazaste? Justifica tu respuesta.

e) Compara tus respuestas con las de un compañero. Discutan qué significado geométrico se puede asociar al término *trasladar*. Registren sus acuerdos.

f) Describan cómo se hace el trazo del motivo rojo a partir del amarillo. En el rojo ubiquen los vértices (A', B', C', D', etcétera) correspondientes a la traslación de los vértices (A, B, C, D, etcétera) del amarillo.

2. Trabaja con un compañero. En la figura 1 se ha trasladado el motivo amarillo para generar el rojo. Respondan y justifiquen en su cuaderno.

a) ¿Cuántos cuadros se ha trasladado el punto **D** para transformarse en su correspondiente **D'**?

b) ¿Hacia qué dirección se trasladó el punto **D**? ¿Puede trasladarse hacia arriba y no alterar el diseño? Argumenta tu respuesta.

c) ¿Cuántos cuadros se trasladó el cuadrado **ABCD** para transformarse en el correspondiente?

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y respondan las preguntas.

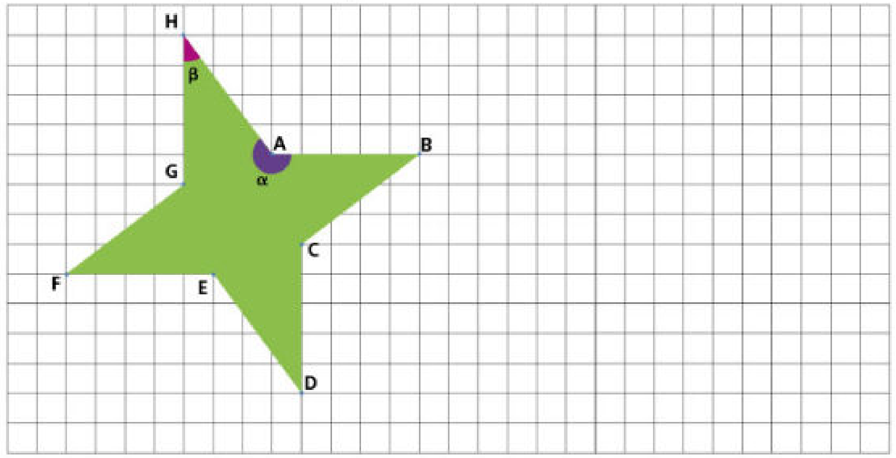
i. ¿Qué diferencia hay entre la traslación y la simetría axial?

ii. Cuando se traslada una figura o un objeto, ¿sólo se puede trasladar de manera horizontal?

Un paso adelante

3. Trabaja con un compañero. Hagan lo que se indica y justifiquen en su cuaderno. La figura que se muestra representa una hoja de hierbabuena. Una tienda de herbolaria solicitó esta figura para usarla como logotipo en las bolsas de empaque.

a) Ubiquen el punto **D** y, respecto a éste, marquen un punto **Z** de tal forma que **Z** esté 15 cuadros a la derecha de **D** y dos cuadros abajo.



b) Trasladen la figura de forma que el trasladado del punto **D** sea el punto **Z**.

c) Expliquen cómo hicieron para trazar la figura trasladada.

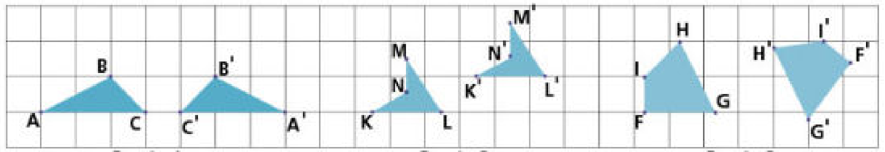
d) Identifiquen y midan los ángulos correspondientes a α y β en la figura trasladada. ¿Qué relación pueden establecer al comparar las medidas de los ángulos?

e) ¿Cómo son entre sí la medida de un lado y la de su lado correspondiente en la figura trasladada?

f) ¿Qué propiedad o relación deducen de ello? Expliquen en detalle.

g) Además de ser una trasladada de la otra, ¿las figuras resultantes son simétricas respecto a un eje?

4. Analicen las siguientes parejas de figuras con base en lo que han trabajado y respondan lo que se pide.



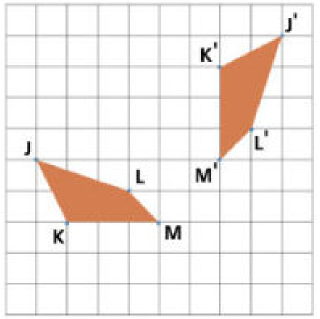
Pareja 1 Pareja 2 Pareja 3

a) De los tres pares de figuras, ¿en cuál o cuáles una es el trasladado de la otra?

b) ¿Qué han considerado para determinar que una figura ha sido trasladada?

c) De las consideraciones que anotaron para que una figura sea trasladada, ¿cuáles no se cumplen en las figuras que no se han trasladado?

5. Trabaja con un compañero. Observen los cuadriláteros de la siguiente figura. El cuadrilátero J'K'L'M' se ha trazado a partir del JKLM. Hagan lo que se indica y justifiquen las respuestas en su cuaderno.



a) ¿El cuadrilátero J´K´L´M´ es simétrico al **JKLM** respecto a un eje de simetría? ¿Están relacionados por una traslación? Justifíquenlo con base en las propiedades de estos movimientos en el plano.

b) Tracen el segmento $\overline{LL'}$ y el segmento $\overline{KK'}$. Tracen las mediatrices de cada segmento. Nombren **O** al punto en el que éstas se intersecan. Tracen la circunferencia con centro en **O** que pase por **L** y la que pase por **K**. ¿Qué notan? Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

c) Completen los datos de la tabla. Usen sus instrumentos de medida.

Segmento	$\overline{JO}$	$\overline{KO}$	$\overline{LO}$	$\overline{MO}$	$\overline{J'O'}$	$\overline{K'O'}$	$\overline{L'O'}$	$\overline{M'O'}$
Medida (cm)								

Ángulo	∢JOJ´	∢KOK´	∢LOL´	∢MOM´
Medida (°)				

d) ¿Cómo interpretan la relación entre las figuras simétricas y los ángulos identificados? Justifiquen su respuesta.

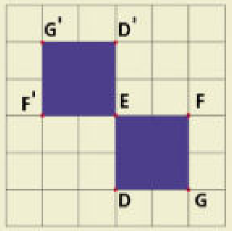
e) La figura **JKLM** se ha rotado alrededor de un punto. ¿Cuál es el punto de referencia?

f) Además, la figura **JKLM** se ha rotado con base en un ángulo. ¿Cuál es la medida del ángulo?

g) La figura **JKLM** se ha rotado en cierta dirección usando el ángulo que respondiste anteriormente. ¿En qué dirección se giró? ¿A favor o en sentido contrario a las manecillas del reloj? Si la rotación se hiciera en el sentido contrario, ¿cuál sería el ángulo de giro?

6. Lee y analiza la información con el grupo.

Traslación de una figura. Es una **isometría** en la que se desliza la figura a lo largo de una trayectoria recta, moviendo cada punto a la misma distancia y en la misma dirección.



Rotación de una figura. Se dice de una isometría en la que una figura gira alrededor de un punto fijo, llamado **centro de rotación**; cada punto de la figura original se rota el mismo número de grados. En una rotación es necesario indicar el centro de rotación, el ángulo de rotación y la dirección (en qué sentido de las manecillas del reloj se hace el giro), por ejemplo: el cuadrado **DEFG** es la figura original, **E** es el centro de rotación, y la figura se rotó 180° en sentido de las manecillas del reloj. Este caso especial de simetría se llama **simetría central** (el ángulo de giro es de 180°).

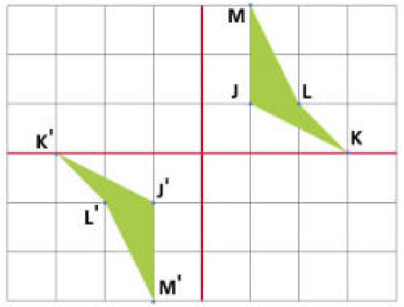
Oriéntate

Isometría. Cuando una figura tiene un cambio de posición o de orientación sin alterar su tamaño ni su forma, se dice que tiene una transformación que se llama *isometría*.

a) Comparen la simetría axial, la traslación y la rotación de figuras. Determinen qué aspectos diferencian un movimiento en el plano respecto a los otros y qué aspectos son comunes.

Profundiza

7. Responde y justifica en tu cuaderno.

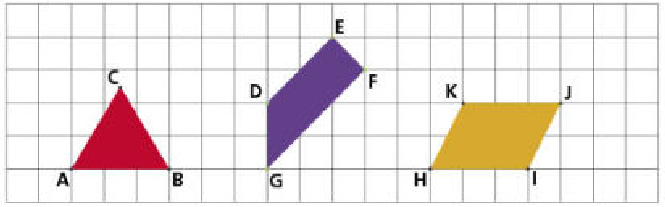


a) Se rotó el polígono **JKLM** para obtener **J'K'L'M'**. Identifica el centro de rotación y el ángulo de rotación.

b) Traza la recta que pasa por **M** y **M´**, la que pasa por **K** y **K´**, etcétera. ¿Qué notas? Escribe tus conclusiones.

c) Selecciona un punto que sea el centro de simetría y rota el polígono **JKLM** 135° en dirección de las manecillas del reloj. Escribe un procedimiento para rotar una figura.

8. Observa las figuras. Efectúa lo que se pide. Justifícalo en tu cuaderno.



a) ¿Qué tipo de rotación se debe aplicar a las figuras para que queden en la posición inicial? Explica cada caso.

b) Si el centro de rotación se encuentra dentro de las figuras y éstas se rotan. ¿A cuál basta rotarla con un ángulo menor a 360° para que quede en la misma posición?

c) Menciona tres ejemplos de polígonos que al rotarlos con un ángulo menor de 360° queden en la misma posición. Trázalos en tu cuaderno.

d) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Escriban una conclusión respecto a los polígonos que quedan en la misma posición al rotarlos con un ángulo menor a 360°.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-091a. Podrás manipular un interactivo para rotar figuras. Analiza el procedimiento para rotar una figura con un ángulo mayor a 360°.

Explora www.redir.mx/matret3-091b. Efectúa todas las rotaciones que se presentan. Comenta, con tus compañeros, tu experiencia y las dificultades que afrontaste.

El segmento que va de los puntos (−2, 4) a (−1, −3) se refleja respecto al eje *x* y luego respecto al eje *y*. Encuentra las coordenadas de los puntos que se obtuvieron. ¿Es posible llegar a ese punto con una transformación?

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 16 en la bitácora de la página 112.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: problemas aditivos

Contenido

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

La estrella de chaquiras

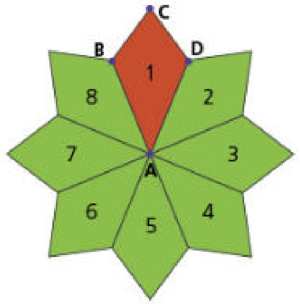
1. Reúnete con un compañero para analizar, discutir y justificar lo solicitado. Respondan en el cuaderno.

a) La imagen de la izquierda corresponde a una estrella que Metzery elaboró con chaquiras.

i. ¿Qué figuras o formas geométricas identifican en la estrella? ¿Se trata de polígonos regulares? Justifica tu respuesta.

ii. ¿Qué tipo de transformaciones en el plano observan: simetría respecto a un eje, traslación o rotación? Explíquenlo.

b) En la siguiente figura se ha representado la estrella de la artesanía huichol.



i. ¿Qué tipo de simetrías o trasformaciones se aplican para generar la estrella a partir del cuadrilátero 1? Describe una sucesión de transformaciones que permiten generar los demás cuadriláteros.

ii. ¿Qué cuadriláteros se pueden obtener a partir de otro usando una simetría axial?

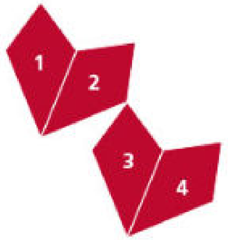
iii. ¿Cuántos ejes de simetría tiene la estrella? Márquenlos en la figura.

iv. Además de la simetría axial, ¿qué otras simetrías o transformaciones hay en la figura?

v. Expliquen por qué se puede determinar el ángulo de rotación sin necesidad de medirlo.

vi. ¿Hacia qué dirección se hicieron las transformaciones de la figura roja para construir la estrella?

c) El diseño en rojo de la figura tiene 4 cuadriláteros (numerados de 1 a 4) y se construyó a partir del cuadrilátero 1. Lean la descripción de la isometría y contesten:



Primero se aplicó una rotación con giro de 45°. De la figura 1 a 3 se aplicó una traslación. De la figura 3 a 4 se aplicó una simetría central.

i. ¿Están de acuerdo con esta descripción? Explíquenlo.

ii. Redacten una manera de generar el cuadrilátero 4 a partir del 1, usando el menor número de trasformaciones.

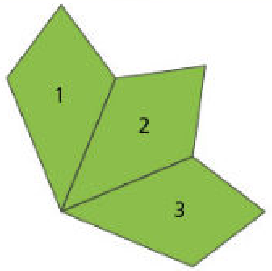
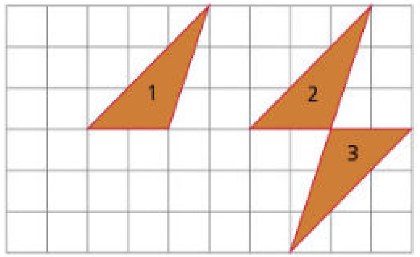
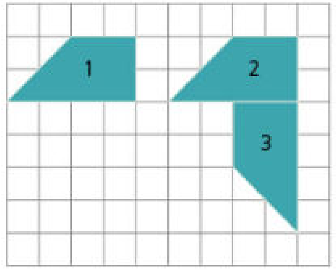
iii. Redacten una manera de generar el cuadrilátero 3 a partir del 2, usando el menor número de trasformaciones.

iv. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Registren las transformaciones que ubicaron en el inciso b) y las que describieron en el inciso c).

Un paso adelante

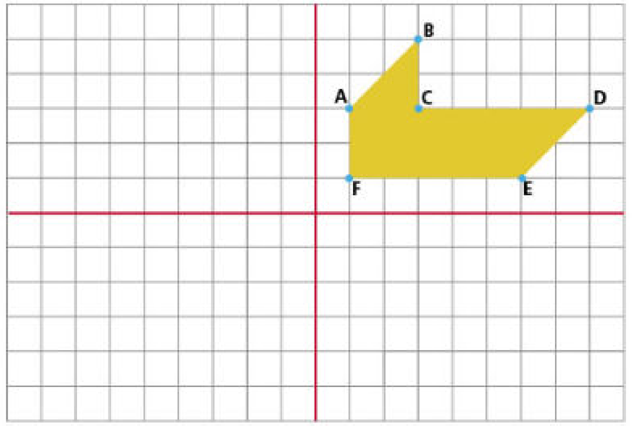
2. Efectúa lo que se indica.

a) Analiza las siguientes figuras (se conforman de tres piezas). En cada caso, escribe qué transformaciones se pueden aplicar para transformar la pieza 1 en la 2 y la 2 en la 3.

Figura	Transformaciones aplicadas
	
	
	

b) Explica si es posible hacer sólo una transformación básica (traslación, rotación o reflexión) que permita pasar de la figura 1 a la 3. Indica en qué casos se puede y en cuáles no.

c) Considera el polígono amarillo como la figura original.



i. Aplica una simetría axial a la figura original respecto al eje x. Traza la figura que se obtiene y denota los vértices correspondientes con las letras **A'**, **B'**, **C'**, **D'**, **E'** y **F'**.

ii. Aplica una simetría axial a la figura que trazaste respecto al eje y. Traza la figura que se obtiene. Denota los vértices correspondientes con las letras **A''**, **B''**, **C''**, **D''**, **E''** y **F''**.

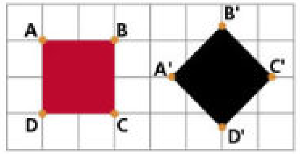
iii. Luego aplica una simetría central a la figura original con centro de simetría en el origen. Traza la figura que se obtiene. ¿Qué observas? Escribe tus conclusiones en el cuaderno.

d) Compara tus respuestas con las de dos compañeros. Discutan si les parecen convincentes los argumentos que utilizaron en la tabla del inciso a). Redacten sus acuerdos y sus desacuerdos.

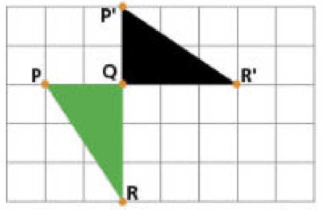
3. Efectúa lo que se pide.

a) Encuentra, para cada figura, las transformaciones que llevan de una a otra. Especifica el centro de rotación, el ángulo de rotación, el eje de simetría, el centro de simetría o la distancia de traslación, según sea el caso.

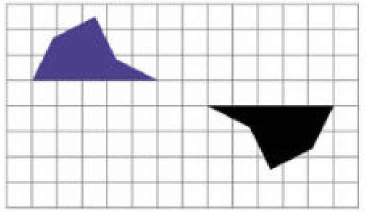
i. Encuentra las transformaciones que convierten al cuadrado **ABCD** en el cuadrado **A'B'C'D'**:



ii. Encuentra las transformaciones que convierten al ΔPQR en el ΔP'Q'R'.



iii. Encuentra la o las transformaciones que llevan al pentágono negro en el pentágono azul.

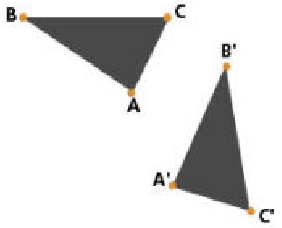


b) Compara las respuestas con las de un compañero. Intercámbienlas y comprueben que las transformaciones del otro sean correctas. ¿Hay más de una manera de hacer transformaciones para llegar de una figura a otra? Escríbanlo en su cuaderno.

Profundiza

4. Haz lo que se indica.

a) Al rotar el ΔABC se obtuvo el ΔA'B'C'. Sigue los pasos para encontrar el centro de rotación que se usó en la transformación.



i. Traza la mediatriz del segmento que une A con A'.

ii. Haz lo mismo para el segmento $\overline{BB'}$.

iii. Llama **O** al punto de intersección de las dos mediatrices.

b) Comenta con un compañero cómo justifican que **O** sea el centro de la rotación que transforma el ΔABC en el ΔA'B'C'. Anoten sus conclusiones en el cuaderno.

c) Discutan los argumentos que escribieron. Determinen cuáles son correctos y propongan ejemplos para mostrar por qué los otros no lo son. Encuentren el valor del ángulo (en sentido de las manecillas del reloj) de la rotación que convierte el ΔABC en el ΔA'B'C'.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-095a. Trabaja todas las transformaciones del interactivo. Efectúa las actividades y anota tus dudas.

Explora www.redir.mx/matret3-095b. Efectúa las actividades. Escribe una autoevaluación con lo que aprendiste, lo que se te dificulta y lo que más te gustó de las lecciones 16 y 17.

Algunos logotipos presentan las transformaciones que estudiaste en estas lecciones. Indica cuáles de ellas identificas.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 17 en la bitácora de la página 112.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: medida

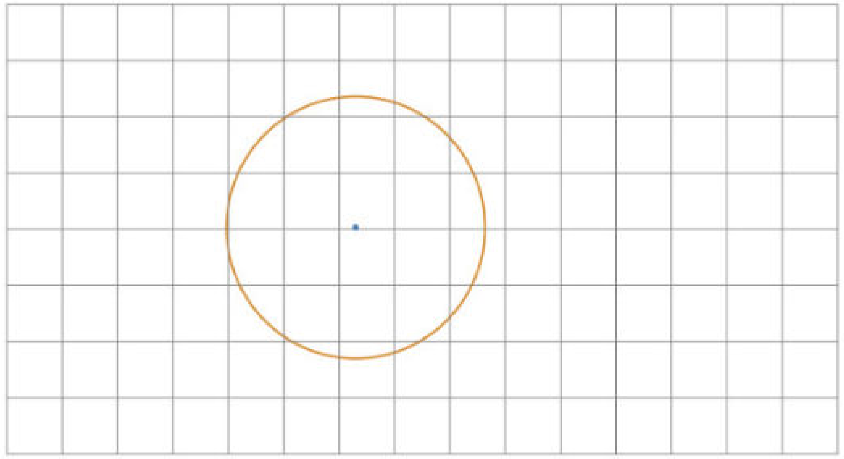
Contenido

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

Cuadrados en un triángulo

1. Haz lo que se indica y responde en tu cuaderno.

a) Traza, en la circunferencia, un triángulo rectángulo cuyo lado de mayor longitud sea el diámetro de la circunferencia, el cual mide 4 cm. Llama al triángulo **ABC**. ¿Cuál es la medida de los otros dos lados del Δ**ABC**?



i. ¿Cuáles son las características del triángulo que trazaste?

ii. Identifica el lado de menor longitud del Δ**ABC**. Traza un cuadrado C_1 sobre ese lado.

iii. Identifica el lado de mayor longitud. Traza un cuadrado C_3 sobre ese lado. Repite esta acción en el lado restante del Δ**ABC**. Traza el cuadrado C_2.

b) Indica la longitud de cada lado del Δ**ABC**.

Lado **AB**: ____________ Lado **AC**: ____________ Lado **BC**: ____________

c) ¿Las medidas de los lados del Δ**ABC** se relacionan de alguna manera?

d) Indica el área de cada cuadrado.

Área de C_1: ____________ Área de C_2: ____________ Área de C_3: ____________

e) ¿Las medidas del área de los cuadrados C_1, C_2 y C_3 están relacionadas de alguna manera?

f) Si se comparan las áreas de los cuadrados C_1 y C_2 con la medida del área de C_3, ¿cómo son las medidas de las áreas? Representen esta relación con una igualdad numérica.

g) Traza, en tu cuaderno, un triángulo rectángulo y los cuadrados asociados a cada uno de sus lados. Establece la relación entre las medidas de sus áreas.

h) Discute con tus compañeros si, en los triángulos que trazaron, se cumple la relación que identificaron entre las áreas de los cuadrados.

Un paso adelante

2. Reúnete con un compañero para analizar la figura. Respondan lo que se pide.

a) Consideren el triángulo rectángulo que se muestra.

Oriéntate

Los lados de un triángulo rectángulo se llaman...

i. Tracen un cuadrado sobre cada lado del triángulo. Al cuadrado que se forma en la hipotenusa llámenlo **C**. A los cuadrados que se forman en los catetos llámenlos **A** y **B**.

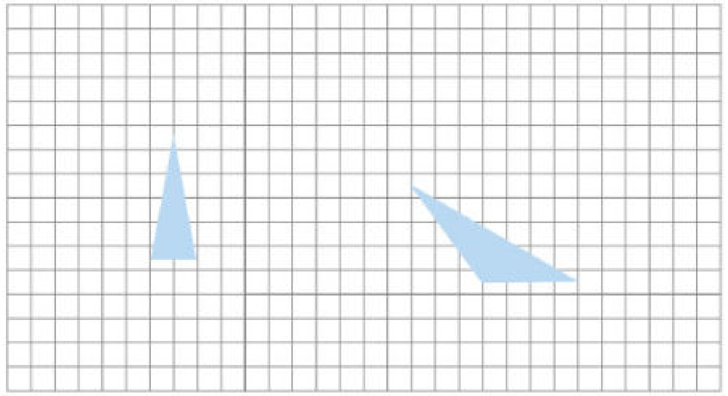
ii. Indiquen el área de los cuadrados **A**, **B** y **C**.

Área de **A**: ____________ Área de **B**: ____________ Área de **C**: ____________

iii. Verifiquen que la medida del área del cuadrado construido sobre el lado mayor (hipotenusa) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados menores (catetos):

____

b) Tracen, en cada triángulo, los cuadrados, según la medida de sus lados.



i. ¿Hay alguna relación entre las áreas de los cuadrados trazados en el triángulo isósceles? Expliquen.

____

ii. Analicen la relación entre las medidas de las áreas de los cuadrados trazados en el triángulo obtusángulo. ____

c) En cada caso, comparen la sumas de las áreas de los dos cuadrados menores (seleccionen uno en el caso del triángulo isósceles) con el área del cuadrado mayor. Escriban una conclusión. ______

d) Tracen, en su cuaderno, un triángulo equilátero. Analicen la relación entre las áreas de los cuadrados que se forman sobre sus lados. Escriban una conclusión. ______________________

e) Tracen, en su cuaderno, dos triángulos acutángulos y dos triángulos obtusángulos. Analicen la relación entre las áreas de los cuadrados que se forman sobre sus lados. Escriban una conclusión.

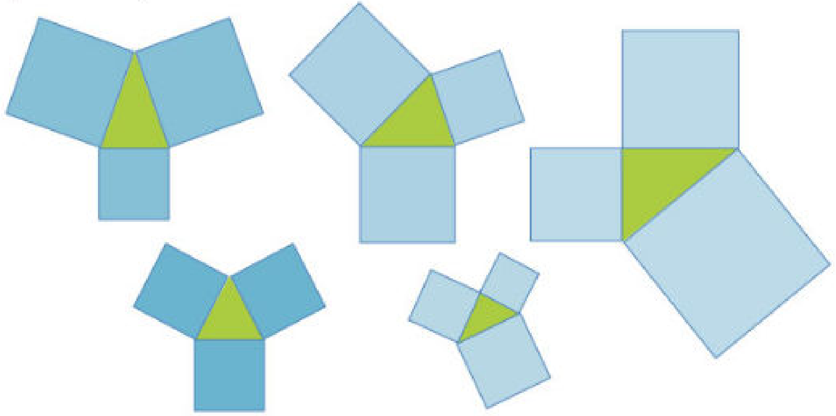
____

f) Comenten con el grupo la relación que se establece entre las áreas de los cuadrados que se forman sobre los lados de un triángulo rectángulo y cómo es la relación cuando el triángulo no es rectángulo. Registren sus conclusiones en el cuaderno.

Profundiza

3. Efectúa lo que se indica.

a) Observa las figuras.



i. Escribe una forma de caracterizar a los triángulos rectángulos a partir de la medida de sus lados.

____

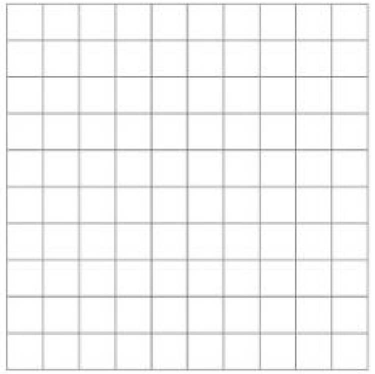
ii. Escribe una forma de caracterizar a los triángulos acutángulos a partir de la medida de sus lados.

____

iii. Escribe una forma de caracterizar a los triángulos obtusángulos a partir de la medida de sus lados.

____

b) Traza un triángulo rectángulo y, sobre cada lado, traza una semicircunferencia. Nómbralas **A**, **B** y **C**.



i. Calcula la medida de las áreas de **A**, **B** y **C**.

Área de **A**: ________ Área de **B**: ________ Área de **C**: ________

ii. ¿Existe alguna relación entre las áreas de las semicircunferencias? Explica tu respuesta.

____

c) Compara las conclusiones que obtuviste con las de tus compañeros. Escriban una conclusión para cada una de las relaciones que encontraron (para cada tipo de triángulo y para las semicircunferencias).

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-099a. Traza un triángulo rectángulo de cada tipo y verifica con ellos las conclusiones que escribieron en esta lección.

Explora www.redir.mx/matret3-099b. Lee la información y efectúa las actividades. Escribe un resumen en tu cuaderno, compara lo que hiciste con lo trabajado en la lección. Comenta tus dudas con un compañero y con tu profesor.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 18 en la bitácora de la página 113.

Con tres listones de 12 cm se formarán tres triángulos: uno acutángulo, uno obtusángulo y uno rectángulo. Indica sus medidas.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: medida

Contenido

Explicitación y uso del teorema de Pitágoras

Los lados de un triángulo rectángulo

1. Trabaja con dos o tres compañeros. Efectúen lo que se pide.

a) Midan los lados de cada triángulo y completen la tabla con esas medidas.


Triángulo 1


Triángulo 2


Triángulo 3


Triángulo 4

	Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa	(Cateto 1)^2	(Cateto 1)^2	(Hipotenusa)^2
Triángulo 1						
Triángulo 2						
Triángulo 3						
Triángulo 4						

b) Representen las medidas de los catetos con las literales *a* y *b*, y la hipotenusa con c. ¿Qué relación satisfacen las áreas de los cuadrados construidos? Exprésenla algebraicamente.

____

c) Las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo son 10 cm y 15 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa? _______________ Expliquen en su cuaderno el procedimiento que siguieron para calcularlo.

d) El cateto de un triángulo rectángulo mide 8.5 cm y su hipotenusa mide 12 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto? _______________ Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

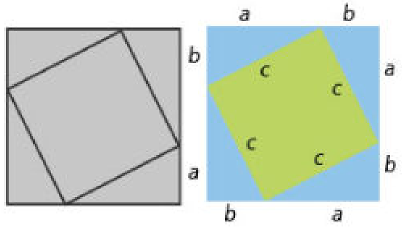
e) Expongan sus respuestas y procedimientos ante el grupo, y registren sus acuerdos. Comenten las dudas y dificultades que tuvieron para calcular la medida faltante en los incisos c) y d).

Un paso adelante

2. Trabaja con compañero. Analicen la construcción geométrica y hagan lo que se indica.

Jesús es azulejero y ha sido contratado para remodelar el piso de una sala. Su cliente le ha solicitado dos tipos de colores en las losetas que empleará. Más tarde, aprobó el diseño y le hizo algunas preguntas.

Loseta original Propuesta de Jesús



Cuadrado **P**

a) ¿Cuál es la medida de cada lado del cuadrado **P**?

____

b) En función de esa medida, escriban una expresión que represente su área. _______________

c) Desarrollen esa expresión. _______________

d) Expliquen, en su cuaderno, por qué los cuatro triángulos son congruentes y por qué son triángulos rectángulos.

e) ¿Cuál es la medida de los ángulos del cuadrilátero que se forma dentro del cuadrado **P**? Justifiquen, en su cuaderno, su respuesta.

f) ¿Cuál es el área de ese cuadrilátero? _______________

g) ¿Cuál es el área de cada triángulo? _______________

h) Expresen el área del cuadrado **P** como la suma de las cinco figuras de su interior. Simplifiquen la expresión algebraica que obtuvieron.

_______________ = _______________

i) Usen las expresiones algebraicas que encontraron en los incisos c) y h). Con ellas justifiquen que $a^2 + b^2 = c^2$. Expliquen, en su cuaderno, el procedimiento que siguieron.

3. Analicen la situación y respondan lo que se pide. Expliquen sus procedimientos en el cuaderno.

a) En un circo, la carpa se monta sobre una circunferencia de 15 m de radio. Las paredes laterales miden 4 m de alto. Para sostenerlas se colocan estacas sobre el pasto a 8 m de la pared. Se quiere conocer la medida de la cuerda que va desde la parte alta de cada pared a la estaca para estimar la cantidad total de cuerda que se debe comprar.

i. ¿Cuál es la medida de cada trozo de cuerda que va sujeta a la estaca? _______________

ii. ¿Cuál es la altura total de la carpa? Con base en la imagen, den una estimación. _______________

____

b) Comparen sus respuestas y procedimientos con los de las demás parejas. Comenten qué estimaciones les parecen las más acertadas. Indiquen un rango de valores para el total de metros de cuerda y la altura de la carpa.

Profundiza

4. Lee y comenta la información con el grupo.

Pitágoras de Samos fue un filósofo griego que vivió alrededor del año 530 a. C.; residió la mayor parte de su vida en la colonia griega de Crotona, en el sur de Italia. De acuerdo con la tradición, fue el primero en demostrar la afirmación (teorema) que hoy lleva su nombre: el teorema de Pitágoras.

Si un triángulo tiene lados de longitud a, b y c, y los dos lados que miden a y b forman un ángulo de 90° (un ángulo recto), se cumple que: $a^2 + b^2 = c^2$.

Es decir, en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de la medida de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

a) Comenten si la información descrita coincide con la relación que encontraron en las actividades anteriores. Si hay dudas, analícenlas para solucionarlas. Después, registren sus acuerdos.

b) Indaguen, en un medio electrónico o impreso, el significado del término *teorema*. ____________

5. Trabaja con dos o tres compañeros. Efectúen lo que se indica.

a) Si a y b representan las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo, escriban una expresión que represente la medida de la hipotenusa.

$c =$ ____________

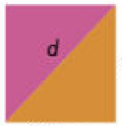
b) Si a representa la medida de un cateto y c la de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, escriban una expresión que represente la medida del otro cateto.

$b =$ ____________

6. Reúnete con dos compañeros. Resuelvan los problemas. Justifiquen sus respuestas en el cuaderno.

a) Una escalera que mide 4 m de largo se recarga sobre una pared y queda apoyada sobre el suelo a 2.4 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared? ____________

b) Un artesano elabora vitrales de colores. Piensa colocar triángulos como se muestra en la imagen. Como medida de seguridad, reforzará con silicón líquido la unión de las dos piezas de vidrio.



10 cm

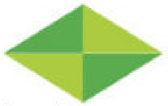
10 cm

i. ¿Qué tipo de triángulo son las piezas que usa el artesano? ____________

ii. ¿Qué figura se forma al unir las dos piezas? ____________

iii. ¿Cuál es la longitud de la diagonal sobre la que pondrá el silicón? ____________

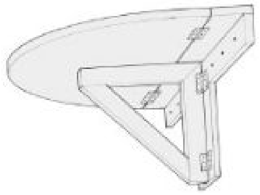
c) El artesano quiere colocar diseños en el vitral como el que se muestra.



i. Si las medidas de los catetos de cada pieza triangular son 10 y 16 cm, ¿cuál es el perímetro del diseño? ____________

ii. Si el artesano desea que el perímetro del diseño sea de 30 cm, indiquen dos posibles piezas que puede usar. ____________

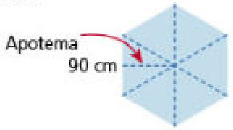
d) Armando está haciendo el diseño de una mesa como la que se muestra. Planea utilizar dos pedazos de madera para el soporte, cada uno de 35 cm de largo. Indica las medidas aproximadas del pedazo de madera que debe colocar en diagonal. Analiza la imagen.



Medidas aproximadas ____________

e) La diagonal de una pantalla de TV mide 43'' y la razón entre el largo y el ancho es de 16:9. Indica la medida del largo y del ancho en centímetros. ____________

f) El siguiente hexágono representa el diseño de una mesa para jardín. Obtengan la medida del área de la mesa si cada uno de sus lados mide 90 cm.



Área del hexágono: ____________

7. Comparen sus respuestas a las actividades 5 y 6 con las de sus compañeros. En caso de que no coincidan, verifiquen por qué. Comenten sus experiencias en clase y registren sus acuerdos respecto a la aplicación del teorema de Pitágoras en la resolución de ejercicios como los efectuados.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-103a. Efectúa las actividades propuestas. Compáralas con lo que hiciste en la lección. Escribe tus conclusiones y coméntalas con el profesor.

Entra a www.redir.mx/matret3-103b. Lee la información sobre Pitágoras. Analiza la demostración y explica en tu cuaderno qué propiedades de las figuras se usaron.

Busca otra demostración del teorema de Pitágoras. Prepara una exposición sobre ella para que se la expliques a tus compañeros.

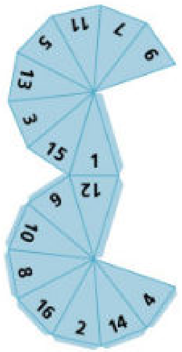
Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 19 en la bitácora de la página 113.

Eje: manejo de la información
Tema: nociones de probabilidad

Contenido

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)



Oriéntate

La probabilidad de que ocurra un evento **A** o un evento **B** es la probabilidad de que ocurra alguno de los dos o los dos.

El dado hexadecagonal

1. Trabaja con un compañero. Analicen y discutan lo que se indica.

a) Observen el desarrollo plano, corresponde a un dado de 16 lados o dado hexadecagonal. Escriban en su cuaderno el espacio muestral del siguiente experimento aleatorio: lanzar el dado y registrar el número que se obtiene.

b) Determinen la probabilidad de los eventos que se indican.

i. ¿Cuáles son los eventos favorables al evento **A**: "cae un número menor a 10"? ¿Cuál es el valor de P(A)? __________

ii. Evento **B**: "cae un número múltiplo de 3". P(B) = __________

iii. Evento **C**: "cae un número par mayor que 5". P(C) = __________

iv. Evento **D**: "cae un número primo". P(D) = __________

c) Consideren los eventos anteriores.

i. ¿Los eventos **A** y **B** son complementarios? Explíquenlo es su cuaderno.

ii. ¿Los eventos **C** y **D** son mutuamente excluyentes? Justifíquenlo en su cuaderno.

iii. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento **A** o el evento **B**? (Es decir, que ocurra alguno de los dos). __________

iv. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento **B** o el evento **C**? __________

d) Escriban el evento complementario en cada caso y calculen lo que se pide.

i. Evento **P**: "cae un número mayor o igual a 3".

- El evento complementario es **Q**: __________
- La probabilidad de que ocurra el evento **P** o de que ocurra el evento **Q** es __________

ii. Evento **R**: "cae un número primo".

- El evento complementario es **S**: __________
- La probabilidad de que ocurra el evento **R** o el evento **S** es __________

e) Escriban un evento mutuamente excluyente, pero no complementario, y calculen lo que se pide.

i. Evento **T**: "cae un múltiplo de 5".

- Un evento mutuamente excluyente es **U**: __________
- La probabilidad de que ocurra el evento **T** o el evento **U** es __________

ii. Evento **V**: "cae un número de un solo dígito".

- Un evento mutuamente excluyente es **W**: __________
- La probabilidad de que ocurra el evento **V** o el evento **W** es __________

f) Comparen sus respuestas con los de otra pareja. Revisen y justifiquen que los eventos que plantearon sí sean mutuamente excluyentes y complementarios. Respondan lo siguiente: la probabilidad de que ocurra un evento es 0.34, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra su evento complementario? Escriban una conclusión en su cuaderno.

Un paso adelante

2. Reúnete con tres compañeros para hacer lo que se indica.

a) Se efectúa el experimento aleatorio de lanzar dos dados de 16 caras de manera simultánea. Escriban, en su cuaderno, el espacio muestral como pares de coordenadas, por ejemplo, si al lanzar los dados el primero sale 2 y el segundo 11, anoten este resultado como (2, 11).

b) En la tabla se han registrado algunos eventos del experimento aleatorio, los resultados posibles del evento y la probabilidad. Completen lo que falta.

Evento al lanzar dos dados hexadecagonales	Resultados posibles del evento	Probabilidad del evento
Evento **A**: "caen dos números cuya suma es menor que 10".	**A** = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)}, (6, 1), (6, 2), (6, 3). (7, 1), (7, 2), (8, 1)	$P(A) = \frac{36}{256}$
Evento **B**: "caen dos números cuya suma es mayor que 26".		
Evento **C**: "caen sólo números impares".		
Evento **D**: "caen sólo números pares".		

Oriéntate

Un **evento simple** es el que tiene asociado solamente un resultado posible del espacio muestral, por ejemplo al lanzar un dado hexadecagonal el evento **A**: "Obtener un 1 al lanzar el dado" es un evento simple, en este caso **A** = {1}.

Un **evento compuesto** es aquel que tiene asociado más de un elemento del espacio muestral, por ejemplo: el evento **C** "Que salga un número menor que 10" es un evento compuesto, pues sus posibles resultados son {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Evento al lanzar dos dados hexadecagonales	Resultados posibles del evento	Probabilidad del evento
Evento **E**: "caen dos números cuya suma es mayor o igual a 28".		
Evento **F**: "caen dos números cuya suma es menor que 8".		

c) Respondan con base en la información de los resultados posibles de los eventos. Justifiquen sus respuestas en el cuaderno.

i. ¿Pueden suceder de manera simultánea los eventos **A** y **B**? ________

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento **A** o el evento **B**? ____________________

ii. ¿Pueden suceder de manera simultánea los eventos **A** y **D**? ________

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento **A** o el evento **D**? ____________________

iii. ¿Pueden suceder de manera simultánea los eventos **C** y **D**? ________

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento **C** o el evento **D**? ____________________

iv. ¿Pueden suceder de manera simultánea los eventos **A** y **F**? ________

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento **A** o el evento **F**? ____________________

d) ¿En qué casos la probabilidad de que ocurra un evento u otro es igual a la suma de las probabilidades de cada uno? Expliquen en su cuaderno por qué ocurre esto. Entre todos hagan lo que se indica.

i. Completen la tabla.

Eventos		¿Son mutuamente excluyentes?	Probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos eventos
P(**A**) =	P(**C**) =		P(**A** o **C**) =
P(**A**) =	P(**E**) =		
P(**E**) =	P(**F**) =		

ii. Si dos eventos son mutuamente excluyentes, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran de manera simultánea? ________________ Justifiquen en su cuaderno la respuesta.

iii. Si dos eventos son complementarios, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran de manera simultánea? ______________ Justifiquen en su cuaderno la respuesta.

iv. Si dos eventos son mutuamente excluyentes, ¿cómo se calcula la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos? Escriban las conclusiones en su cuaderno.

Profundiza

3. Lee la información con el grupo, ayudados por su profesor, y coméntenla.

Dados dos eventos, **A** y **B**, mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos se denota como P(**A** o **B**) y se calcula al sumar las probabilidades de cada evento. Esto se representa de la siguiente manera: P(**A** o **B**) = P(**A**) + P(**B**).

Esta regla se conoce como la **regla de la suma**.

Ya que dos eventos complementarios son mutuamente excluyentes, en ese caso se usa la misma regla. Si **A** es un evento, su evento complementario se denota como $\mathbf{A}^c$.

a) Trabaja con el compañero con quien hiciste la actividad 2. Retómenla y hagan lo que se pide.

i. Describan un evento y escriban, en su cuaderno, los resultados posibles que le corresponden.

Evento **H**: ____

ii. Escriban, en su cuaderno, los resultados posibles del evento $\mathbf{H}^c$.

iii. Calculen P(**H**) = __________ iv. Calculen P($\mathbf{H}^c$) = __________

b) Describan un evento **J** que sea mutuamente excluyente de **H**.

Evento **J**: ____

c) Describan un evento **K** que no sea mutuamente excluyente de **H**.

Evento **K**: ____

d) Calculen las probabilidades que se indican.

i. Calculen P(**H** o $\mathbf{H}^c$) = ____ ii. Calculen P(**H** o **J**) = ____ iii. Calculen P(**H** o **K**) = ____

e) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten por qué la probabilidad de dos eventos complementarios es igual a 1 y por qué para los eventos no mutuamente excluyentes no se puede usar la regla de la suma; por ejemplo, P(**H** o **J**) no es igual a P(**H**) + P(**J**).

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-107a. Encontrarás información sobre la regla de la suma. Haz las actividades. Elabora un resumen en tu cuaderno; si tienes dudas, coméntalas con un compañero y revisen las actividades de la lección.

Explora www.redir.mx/matret3-107b. Efectúa las actividades. Comenta, con tus compañeros, tu experiencia y qué dificultades afrontaste.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 20 en la bitácora de la página 113.

Eje: manejo de la información
Tema: nociones de probabilidad

Contenido

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

Juegos clásicos de azar

1. Trabaja con un compañero. Analicen y resuelvan, en su cuaderno, cada una de las situaciones.

a) La lotería es un juego de azar tradicional mexicano. Cada jugador debe seleccionar un tablero (como los que se muestran). Una persona va sacando tarjetas de un mazo y nombra o "canta" el nombre de la tarjeta. Los jugadores que tienen esa ilustración en su tablero colocan una semilla sobre éste. El jugador que complete primero su tablero gana el juego. En total hay 54 cartas diferentes.

i. Escriban el espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en sacar una carta del mazo.

ii. Escriban dos eventos, que no sean simples, para este experimento aleatorio.

Evento **A**: ______

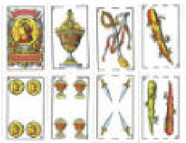
Evento **B**: ______

iii. Describan cómo se calcula la probabilidad de que ocurra el evento **A** o el evento **B**. ______

______

______

______



b) La baraja española consiste en un mazo o una colección de 40 cartas, clasificadas en cuatro palos o grupos, cada uno numerado del 1 al 7 y del 10 al 12 (los mazos no tienen los números 8 y 9). Las figuras de la baraja española que corresponden a los números 10, 11 y 12 se llaman *sota*, *caballo* y *rey*, respectivamente. La carta con el número 1 se llama *as*. Se hace el experimento aleatorio de sacar una carta del mazo.

i. Describan dos eventos, **C** y **D**, mutuamente excluyentes. Indiquen el valor de P(**C** o **D**).

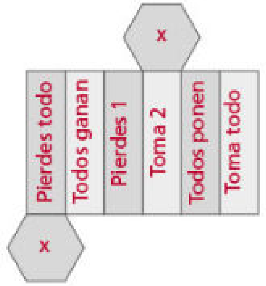
Evento **C**: ______

Evento **D**: ______ P(**C** o **D**): ______

ii. Describan dos eventos, **E** y **F**, complementarios. Indiquen el valor de P(**E** o **F**).

Evento **E**: ______

Evento **F**: ______ P(**E** o **F**): ______



c) La perinola es otro juego de azar. Ésta se hace girar sobre su eje y se detiene en alguna de sus seis caras. El resultado de una tirada es que se pierden o ganan objetos. En la imagen se muestra el desarrollo plano de una perinola regular. Consideren los siguientes eventos.

Evento **G**: "algún jugador gana". Evento **H**: "algún jugador pierde". Evento **J**: "sólo el que tira gana".

i. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento **G** o el evento **H**? ______

ii. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento **G** o el evento **J**? ______

iii. ¿En cuáles de los casos anteriores se aplica la regla de la suma? ______

iv. ¿Cuál es el evento G^c? ______

v. Expresa la probabilidad de G^c en términos de la probabilidad de **G**. ______

d) Comparen sus resultados con los de sus compañeros. En caso de haber dudas o dificultades, aclárenlas entre todos y regístrenlas para que las retomen más adelante. Escriban una conclusión sobre el significado de P(**A** o **B**) para dos eventos **A** y **B**.

Un paso adelante

2. Trabaja con un compañero. Analicen las situaciones y efectúen lo que se indica.

a) En una fábrica de productos lácteos hay cinco máquinas para pasteurizar leche y envasarla en *tetra pack* de 1 l de capacidad. Distintos grupos de empleados empaquetan los envases para su distribución. El proceso se ha organizado de la siguiente manera.

- La máquina 1 pasteuriza 25% de la producción diaria, y los productos son empaquetados por el grupo de empleados A.
- La máquina 2 pasteuriza 33% de la producción diaria, y los productos son empaquetados por el grupo de empleados B.
- La máquina 3 pasteuriza 15% de la producción diaria, y los productos son empaquetados por el grupo de empleados C.
- La máquina 4 pasteuriza 7% de la producción diaria, y los productos son empaquetados por el grupo de empleados D.
- La máquina 5 pasteuriza el resto de la producción, y los productos son empaquetados por el grupo de empleados E.

Al final de cada día se selecciona un producto para verificar su calidad, tanto en el proceso de pasteurización como en el de empaquetamiento. Observen los eventos y respondan.

Evento **L**: "el producto fue empaquetado por el grupo de empleados D".
Evento **M**: "el producto fue empaquetado por el grupo de empleados A o por el grupo C".
Evento **N**: "el producto fue pasteurizado en la máquina 3 o fue empaquetado por el grupo de empleados D".
Evento **O**: "el producto fue pasteurizado en la máquina 2 o en la máquina 1".

i. P(L) = ______ ii. P(M) = ______

iii. P(N) = ______ iv. P(O) = ______

v. P(M o N) = ______ vi. P(O^c) = ______

vii. P(O o O^c) = ______ viii. P(L o N) = ______

b) Se sabe que, en una población, la probabilidad de que una persona acceda a internet por un teléfono celular es de 0.55, la probabilidad de que acceda mediante una computadora de escritorio es de 0.42, la probabilidad de que tenga acceso por medio de una computadora portátil es de 0.23 y la probabilidad de que acceda desde una tableta es de 0.15.

i. Expliquen si la probabilidad de que una persona acceda a internet por medio de una computadora de escritorio o una tableta es de 0.57. Justifiquen su respuesta. ____________________

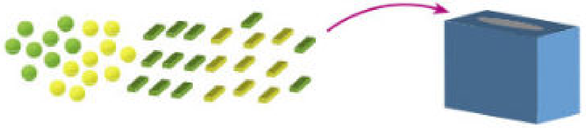
____

c) Comparen y analicen sus respuestas con la ayuda del profesor. Lleguen a un acuerdo respecto a la aplicación de la regla de la suma para eventos.

Profundiza

3. Trabaja con dos o tres compañeros. Analicen la situación y respondan lo que se pide.

a) Se efectúa el experimento aleatorio de extraer una ficha de una urna; en ella hay fichas circulares y fichas rectangulares de dos colores, amarillas y verdes, tal como se muestra.



i. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha amarilla de forma circular? __________

ii. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha rectangular, sin importar su color? __________

iii. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha amarilla? __________

b) Consideren los eventos al extraer una ficha de la urna.

Evento **A**: "extraer una ficha circular". Evento **B**: "extraer una ficha verde".

i. ¿Los eventos **A** y **B** son …? Subrayen la respuesta correcta.

Mutuamente excluyentes.	No son mutuamente excluyentes.
Complementarios.	Ninguna de las anteriores.

c) Respondan lo que se pide para determinar la probabilidad de extraer de la urna una ficha circular (evento **A**) o de extraer una ficha verde (evento **B**), es decir, calcular P(**A** o **B**).

i. ¿Cuántas fichas circulares hay dentro de la urna? __________

ii. ¿Cuántas fichas verdes hay dentro de la urna? __________

iii. ¿Cuántas fichas son circulares y verdes? __________

iv. ¿Cuál es el valor de P(**A** o **B**)? __________ Justifiquen su respuesta. __________

____

v. Escriban qué diferencias y semejanzas identifican entre los problemas planteados en la actividad 2, incisos a) y b), y el problema de las urnas. ____________________

____

____

4. Lee y comenta la información con el grupo. Contrástenla con sus conclusiones de la actividad anterior. Después, trabajen en pareja y efectúen lo que se pide.

Para calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos **A** y **B** que no son mutuamente excluyentes se usa la siguiente regla.

Regla de la suma: P(**A** o **B**) = P(**A**) + P(**B**) − P(**A** y **B**)

Donde P(**A** y **B**) representa la probabilidad de ocurrencia simultánea de los eventos **A** y **B**.

a) Trabaja con un compañero. Retomen la situación de la urna y las fichas verdes y amarillas. Propongan dos eventos **C** y **D** que no sean mutuamente excluyentes y calculen P(**C** o **D**) con la regla de la suma.

Evento **C**: ____________________

Evento **D**: ____________________ P(**C** o **D**): __________

b) Calculen las probabilidades que se indican.

i. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha rectangular o amarilla? __________

ii. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha rectangular y amarilla? __________

iii ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha amarilla o verde? __________

iv ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha amarilla y verde? __________

v. ¿Cuál es la probabilidad de extraer de la urna una ficha de cualquier forma o de extraer una ficha amarilla? __________

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Expliquen cómo las determinaron. Escriban una conclusión acerca del significado de P(**A** y **B**) para dos eventos **A** y **B**.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-111a. En "Azar y probabilidad" entra a las actividades de la primer columna. Comenta tu experiencia con un compañero.

Explora www.redir.mx/matret3-111b. Efectúa las actividades. Escribe en tu cuaderno qué aprendiste sobre los eventos excluyentes y los complementarios.

Para dos eventos mutuamente excluyentes **A** y **B**, se sabe que P(**A**) = 0.37 y P(**A** o **B**) = 0.85. Calcula P(**B**) y P(**A** y **B**).

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 21 en la bitácora de la página 113.

Lecciones 13, 14 y 15

a) Escribe qué factorización se usa para cada una de las siguientes ecuaciones y resuélvelas en tu cuaderno.

$4x^2 - 9 = 0$ ____________ $x^2 + 5x = 0$ ____________

$6x^2 + 3x = 0$ ____________ $x^2 - 14x + 49 = 0$ ____________

b) Plantea y resuelve la ecuación para el problema. Una sala rectangular tiene 28 m² de área. Si el largo mide 3 m más que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la sala? ____________

____

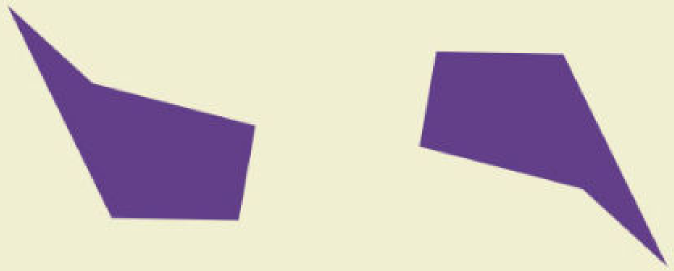
Lección 16

a) Describe dos formas de rotar un pentágono sobre su centro para que no se altere su posición original. ____

____

Lección 17

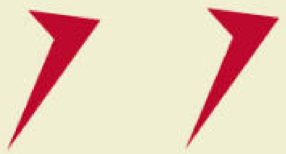
a) Escribe qué tipo de simetría tienen las siguientes figuras, y marca el eje de simetría si es axial o el punto de simetría si es central.



b) La figura azul se obtuvo al rotar la verde. Encuentra el centro de rotación y mide el ángulo de rotación con ayuda de un transportador.

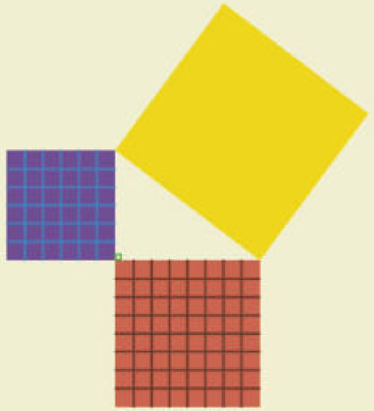
c) En las figuras anteriores, ¿cuánto hay que girar la azul, en el sentido de las manecillas del reloj, para regresar a la figura verde? ____________ ¿Y en el otro sentido? ____________

d) Las figuras de la derecha tienen su ángulos y lados correspondientes iguales, por tanto son ________ ________ Identifica los puntos correspondientes, y traza las rectas que los unen. La transformación para pasar de una figura a la otra es una ____________



Lección 18

Observa la figura y responde. Cada cuadrito tiene una unidad cuadrada de superficie.



a) ¿Cuál es el área del cuadrado amarillo?

Lección 19

Reúnete con un compañero y efectúa lo que se indica.

a) Enuncia y explica, en tu cuaderno, el teorema de Pitágoras.

b) El cateto de un triángulo rectángulo mide 11 cm, la hipotenusa mide 17 cm, ¿cuánto mide el otro cateto? ____________

Lecciones 20 y 21

Responde lo que se indica respecto al experimento aleatorio de tirar un dado de 12 caras y observar la cara superior.

a) Describe dos eventos mutuamente excluyentes **A** y **B**. ____________

____

b) Describe dos eventos complementarios **C** y **D**. ____________

____

c) Describe $\mathbf{B}^C$. ____________

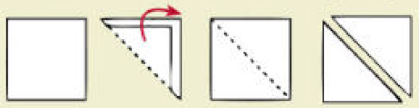
d) Calcula P(**A** o **B**) ________ P(**C** o **D**) ________ $P(\mathbf{A}^C)$ ________

La construcción del Tangram

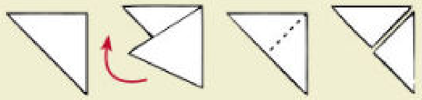
1. Dobla y corta como se indica para obtener un tangram.

Analiza con cuidado qué piezas conforman el tangram:

a) De un cuadrado se obtienen dos triángulos iguales (1).

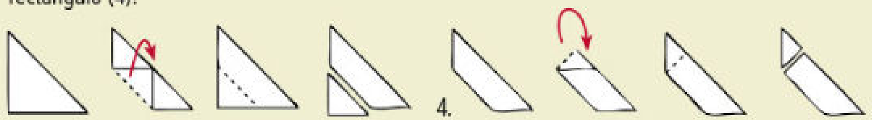
1. 

b) Al doblar uno de los dos triángulos se obtienen dos nuevos triángulos (2).

2. 

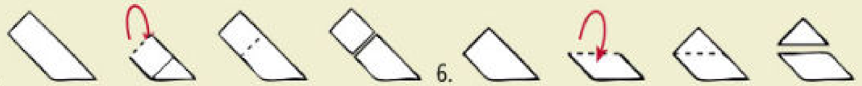
c) El otro triángulo que quedó se dobla por el vértice del ángulo recto, de tal manera que llegue hasta el lado opuesto de ese ángulo y que la línea que resulte sea paralela a ese lado. Se obtienen así un triángulo y un trapecio (3).

d) Se dobla el trapecio por uno de los vértices de la base mayor, de modo que el doblez sea perpendicular tanto a la base menor como a la base mayor. Así se consiguen otro triángulo y un trapecio rectángulo (4).

3. 4. 

e) Se dobla ahora el trapecio rectangular de tal manera que el doblez sea perpendicular tanto a la base menor como a la base mayor y la base menor se divida en dos partes iguales. Así se consiguen un cuadrado y un trapecio rectangular (5).

f) Este nuevo trapecio rectangular se dobla para que el vértice del ángulo recto de la base mayor coincida con el vértice del ángulo obtuso de la base menor. Al cortar sobre el doblez se obtienen un triángulo y un paralelogramo (6).

5. 6. 

2. Haz lo siguiente.

a) Construye diferentes figuras conocidas, fácilmente identificables, usando todas las piezas del tangram.

b) Construye una figura que tenga simetría axial e indica el eje de simetría.

c) Construye dos figuras que tengan simetría central (no es necesario usar todas las piezas).

d) Construye dos figuras congruentes.

El teorema de Pitágoras

1. Contesta.

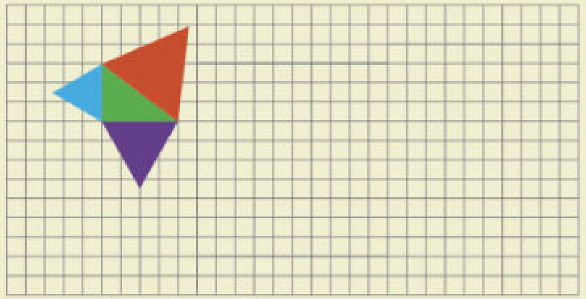
a) ¿Cuál es el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro es de 9 cm? ______________

b) Explica, en el cuaderno, el procedimiento que seguiste para calcularlo.

2. Lee la información y resuelve.

El teorema de Pitágoras relaciona el área de los cuadrados que se construyen sobre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. ¿Qué ocurriría si, sobre los lados del triángulo, se trazara un triángulo equilátero?

a) Analiza la figura. Calcula el área de los triángulos y determina cómo se relacionan las áreas.



	Cateto	Cateto	Hipotenusa
Longitud	3 cm	4 cm	5 cm
Área del triángulo equilátero			

b) Anota en la tabla las medidas de los lados de otro triángulo rectángulo. Calcula el área de los triángulos equiláteros y corrobora la relación entre éstas.

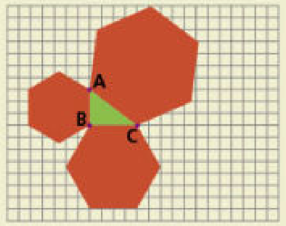
	Cateto	Cateto	Hipotenusa
Longitud			
Área del triángulo equilátero			

c) Escribe un enunciado que describa la relación entre el área de las figuras.

____

____

d) Observa la figura. Calcula el área de los hexágonos y determina cómo se relacionan éstas.



	Cateto	Cateto	Hipotenusa
Longitud	3 cm	4 cm	5 cm
Área del hexágono			

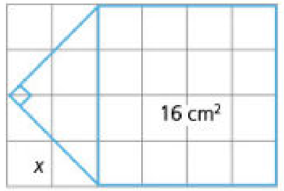
e) ¿Ocurrirá lo mismo si se trazan diversos polígonos regulares sobre los lados del triángulo rectángulo? Escribe un procedimiento que te permita averiguarlo.

____

____

Lee con atención los planteamientos, elige la respuesta correcta y márcala en la sección de respuestas.

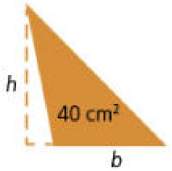
1. En la figura, ambos catetos miden lo mismo y el área del cuadrado es de 16 cm². ¿En qué inciso se calcula correctamente la longitud de cada cateto (x)?



a) $2x^2 = 4; x = \sqrt{2}$ b) $2x^2 = 16; x = \sqrt{8}$

c) $2x = 16; x = 8$ d) $2x = 4; x = 2$

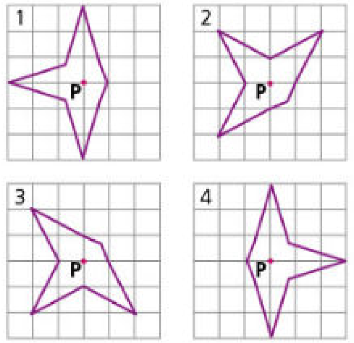
2. El área de un triángulo es de 40 cm², y una de las alturas (h) mide 2 cm más que la base correspondiente (b). ¿Qué ecuación permite calcular la altura y cuál es su solución?



a) $h(h + 2) = 80; h = 8$ b) $h(h + 2) = 40; h = 8$

c) $h(h - 2) = 80; h = 10$ d) $h(h - 2) = 40; h = 10$

3. Las figuras 2, 3, y 4 son rotaciones de la 1 respecto al punto P. En sentido contrario al de las manecillas del reloj, ¿cuánto mide el ángulo de rotación en cada caso?



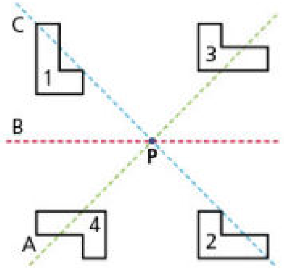
a) Figura 2: 45°; figura 3: 315°; figura 4: 90°.

b) Figura 2: 45°; figura 3: 315°; figura 4: 180°.

c) Figura 2: 315°; figura 3: 45°; figura 4: 90°.

d) Figura 2: 315°; figura 3: 45°; figura 4: 180°.

4. ¿Cómo se relacionan las figuras 1, 2, 3 y 4?

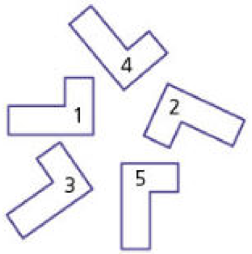


a) La figura 2 es una rotación de la 1 respecto al punto P. La figura 3 es una simetría de la 2 respecto a la recta B. La figura 4 es una traslación de la 3.

b) La figura 2 es una rotación de la 1 respecto al punto P. La figura 3 es una traslación de la 2. La figura 4 es una simetría de la 3 respecto a la recta C.

c) La figura 2 es una reflexión de la 1 respecto a la recta A. La figura 3 es una traslación de la 2. La figura 4 es una rotación de la 3 respecto al punto P.

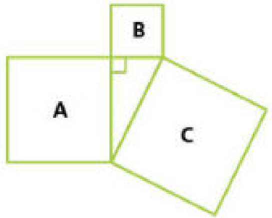
d) La figura 2 es una reflexión de la 1 respecto a la recta A. La figura 3 es una rotación de la 2 respecto al punto P. La figura 4 es una traslación de la 3.



5. De las figuras 2, 3, 4 y 5, todas, excepto una, son rotaciones de la figura 1. ¿Cuál?

a) La figura 5. b) La figura 4. c) La figura 3. d) La figura 2.

6. Los lados del cuadrado B de la figura miden la mitad que los del A, y el área del cuadrado C es de 45 unidades cuadradas. ¿Cuánto miden los lados de los cuadrados A y B?



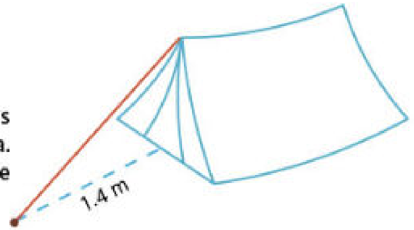
a) **A**: 6 unidades; **B**: 3 unidades.

b) **A**: 3 unidades; **B**: 6 unidades.

c) **A**: 30 unidades; **B**: 15 unidades.

d) **A**: 15 unidades; **B**: 30 unidades.

7. Para sostener una tienda de campaña de 1 m de altura, se sujetará una de las puntas a una argolla en el suelo que está a 1.4 m de distancia de la entrada. ¿Cuántos metros de cuerda se necesitan considerando que en cada extremo se requieren 20 cm más para hacer los nudos?



a) 1.72 m b) 1.92 m c) 2.12 m d) 2.32 m

8. Para conocer los efectos secundarios de un medicamento, se administró el tratamiento a 1 000 voluntarios. 50 presentaron síntomas de insomnio y 20 manifestaron dolor de cabeza. De acuerdo con los datos, ¿es posible calcular la probabilidad de que un paciente presente alguno de esos dos síntomas?

a) Sí, basta sumar la probabilidad frecuencial de ambos síntomas.

b) Sí, basta restar la probabilidad frecuencial de ambos síntomas.

c) No, falta información pues hay que saber cuántos pacientes presentaron los síntomas simultáneamente.

d) No, falta información pues hay que saber si esos son los únicos síntomas posibles.

9. La mitad de los alumnos de un grupo de secundaria asiste a la biblioteca al menos dos veces por semana; la tercera parte, exactamente dos veces por semana. ¿Qué parte del grupo asiste más de dos veces por semana?

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{6}$ c) $\frac{3}{6}$ d) $\frac{5}{6}$

10. Guillermo tirará dos dados en un juego de mesa y tiene dos maneras de ganar: que los dos caigan en el mismo número, por ejemplo, 4 y 4; o bien que la suma de ambos sea mayor que 10, por ejemplo, 5 y 6. ¿Qué probabilidad tiene de ganar?

a) $\frac{6}{36} + \frac{3}{36}$ b) $\frac{6}{36} - \frac{3}{36}$ c) $1 - (\frac{6}{36} + \frac{3}{36})$ d) $\frac{6}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36}$

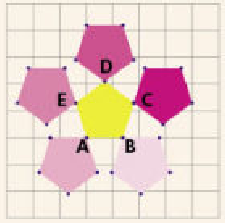
Respuestas de la evaluación correspondiente al bloque 2

1. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
7. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
8. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
9. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

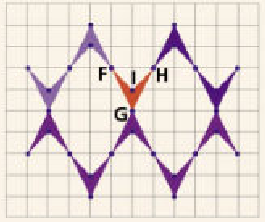
Lee con cuidado la situación y responde lo que se pide. Justifica tus respuestas.

Logotipos

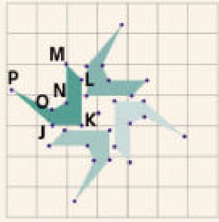
Un logotipo sirve para identificar a una empresa o institución de forma que los receptores lo asocien con los productos o servicios que se ofrecen. Con esta filosofía, una empresa mexicana dedicada al diseño de baldosas y cenefas, estableció un concurso para el diseño del logotipo institucional. Las tres propuestas finalistas son las siguientes.



Flor pentagonal



Ondas marinas



Rehilete

Pregunta 1. Indica dos procedimientos distintos para construir los logotipos que se indican, a partir de una figura base, usando movimientos en el plano (rotación, traslación y simetría axial).

Ondas marinas	Rehilete
Figura base: cuadrilátero **FGHI**	Figura base: heptágono **JKLMNOP**
Procedimiento A:	Procedimiento A:
Procedimiento B:	Procedimiento B:

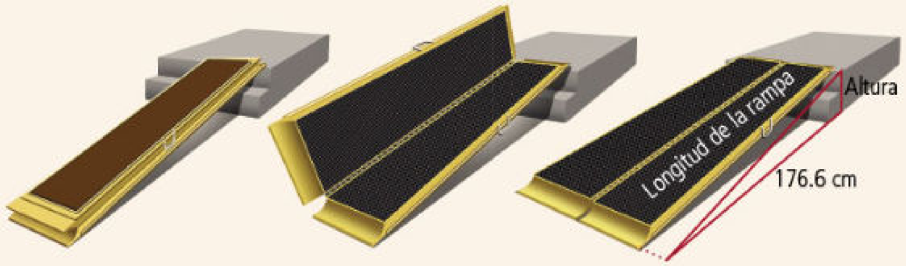
Pregunta 2. Identifica la figura base en cada logotipo. ¿En qué propuesta es posible aplicar varias rotaciones a la figura base para obtener el diseño final?

Pregunta 3. Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Aquellas que sean falsas, redáctalas de manera que sean verdaderas.

Oraciones	Veracidad	Propuesta
Las isometrías en el plano son traslaciones, rotaciones y reflexiones de cuerpos geométricos.		
Una isometría es cuando una figura tiene un cambio de posición u orientación; aunque hay modificaciones en el tamaño, se mantienen las propiedades de las figuras.		
Cuando se aplica una rotación se dice que una figura gira alrededor de un punto fijo llamado centro de rotación.		
En una traslación de una figura se desliza la figura a lo largo de una trayectoria recta, curva o mixta, moviendo cada punto en la misma distancia pero diferente dirección.		
Un caso especial de la rotación es la simetría central, donde el ángulo de giro es de 180°.		

Rampas

En la actualidad se han diseñado rampas para que los usuarios de sillas de ruedas tengan una mayor accesibilidad e independencia. Estas rampas son ligeras, de fácil manejo e instalación. Un modelo estándar pesa 6.8 kg, se pliega a la mitad y se carga como un maletín. Está fabricado de aluminio resistente y durable; su superficie es antiderrapante y de alta tracción. En la imagen que se muestra la rampa se ha colocado sobre unos escalones; cada escalón tiene una altura de 17.4 cm y el final de la rampa está a 176.6 cm de ellos. El ancho total de la rampa es de 76 cm.



De acuerdo con lo anterior, haz lo que se pide:

Pregunta 1. Indica cuál es el largo de la rampa.

Pregunta 2. Indica las medidas aproximadas de la superficie antiderrapante.

Autoevaluación

Analiza tu desempeño en el bimestre y selecciona, en cada caso, la acción que mejor lo represente.

	Soy capaz de explicarlo a otros o ayudarlos.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resolver ecuaciones cuadráticas mediante la factorización				
Modelar situaciones con ecuaciones cuadráticas				
Identificar las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras				
Construir diseños con todos los tipos de isometrías				
Resolver problemas por medio del uso el teorema de Pitágoras				
Calcular la medida de probabilidad de eventos mutuamente excluyentes y complementarios				

Comenta con el profesor tus avances y dificultades.

Trenes en suspensión

La física es el campo de conocimiento más cercano a las matemáticas. De su relación surgen aplicaciones y avances que mejoran la calidad de los servicios que utilizamos día a día.
Respecto a la manera como nos transportamos, por medio del desarrollo científico y tecnológico muchas veces disminuyen los tiempos de traslado, además de que, con ellos, se pretende reducir los efectos negativos en el medio ambiente. De este modo, el uso de imanes, electroimanes y superconductores ha permitido fabricar trenes muy veloces que en ningún momento tienen contacto físico con los rieles. Entre sus ventajas se encuentra la reducción del ruido al mínimo, tanto en su interior como en el exterior. Sin embargo, su construcción es demasiado costosa en comparación con otros sistemas de transporte, aunque el mantenimiento que requiere es mucho menor. Así pues, la matemática y la física permiten responder las siguientes preguntas: ¿cómo se reparte la energía aplicada al tren para mantener la levitación y superar la resistencia del aire?, ¿cómo funcionan la fuerza repulsiva y la de atracción entre los imanes?, ¿a cuántos pasajeros se debería prestar servicio con este sistema de transporte para que su construcción y estabilidad resulten viables?
Investiga en qué países ya cuentan con trenes de levitación magnética (maglev).

Bloque 3

Aprendizajes esperados

1. Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
2. Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: patrones y ecuaciones

Contenido

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

El tiro vertical

La profesora de Ciencias le solicitó a Raquel que expusiera el tema "Tiro vertical" y que presentara un problema relacionado con éste. Ella expuso la siguiente información.

Tiro vertical
Cuando se lanza un objeto hacia arriba, el movimiento está sujeto a la aceleración gravitacional; esta aceleración se opone al movimiento inicial del objeto. El tiro vertical comprende subida y bajada; por lo que hay que tener en cuenta lo siguiente.

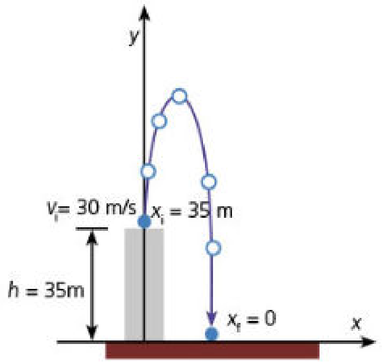
- La velocidad inicial es distinta de cero.
- Cuando el objeto alcanza su altura máxima, la velocidad en ese punto es cero. Mientras el objeto se encuentra de subida, la velocidad es positiva; cuando desciende, su velocidad es negativa.
- Para la misma posición de lanzamiento, la velocidad de subida es igual que la de bajada, pero el signo de velocidad descendiente es negativo.

La ecuación que se utiliza para determinar el tiempo que dura el movimiento de una pelota, desde que se le lanza verticalmente hasta que toca el piso, es

$$x_i + v_i t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

Donde x_i es la posición inicial del objeto, v_i es la velocidad inicial (en metros sobre segundo), g es la gravedad, su valor es la constante 9.8 m/s² y t es el tiempo en segundos.

Para cerrar su exposición, Raquel presentó este problema: "¿Cuánto tiempo tarda en caer una pelota lanzada desde el techo de un edificio, como se muestra a continuación?", y lo resolvió.



Oriéntate

En la ecuación el valor desconocido es el de la variable t, los valores x_i, v_i son valores que conocemos a partir de los datos que se proporcionan en la situación, g es un valor constante.

1. Reúnete con un compañero. Efectúen, en su cuaderno, lo que se indica.

a) Al sustituir los datos en la fórmula, ¿qué ecuación resulta? Escríbela.

b) ¿Qué tipo de ecuación es? ¿Cuántas variables hay en la ecuación?

c) ¿La ecuación cuadrática que resulta tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$? Argumenten su respuesta en el cuaderno.

d) ¿Se puede resolver la ecuación por factorización? ________ ¿Por qué? Expliquen en su cuaderno.

e) Si el valor de g se toma como 10 m/s², ¿qué ecuación resulta? ____________________

f) ¿Esta ecuación se puede resolver por factorización? Argumenten su respuesta en su cuaderno.

2. Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen sus respuestas. Luego, con todo el grupo, contesten si pudieron resolver la segunda ecuación con el valor g = 10 m/s². ¿Qué procedimiento usaron para resolverla? ¿Cómo se puede resolver la ecuación $4.9t^2 - 30t - 35 = 0$? ¿Se puede simplificar como lo hicieron con $5t^2 - 30t - 35 = 0$?

Un paso adelante

3. Haz equipo con un compañero y analicen la información. Luego, hagan lo que se indica.

La factorización no es siempre la forma eficiente de encontrar las raíces de una ecuación cuadrática. Para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, por lo general es conveniente utilizar la **fórmula general de una ecuación cuadrática** con la que se establece el valor de las soluciones a partir del valor de los coeficientes a, b y c.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El símbolo ± indica que el signo (+) se usa para obtener una solución (x_1) y el signo (–) para la otra solución (x_2).

De tal forma se dice que, en general, las dos soluciones de una ecuación cuadrática se calculan así:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a) De acuerdo con lo anterior, ¿cuáles son los valores de a, b y c que representan estas literales en la ecuación $4.9t^2 - 30t - 35 = 0$? Escríbanlos en los recuadros correspondientes y efectúen las operaciones que se indican.

$$\left.\begin{array}{l} a = \boxed{} \\ b = \boxed{} \\ c = \boxed{} \end{array}\right\} \longrightarrow t = \frac{-\boxed{} \pm \sqrt{\boxed{}^2 - 4 \cdot \boxed{} \cdot \boxed{}}}{2 \cdot \boxed{}} = \frac{-\boxed{} \pm \boxed{}}{\boxed{}}$$

b) Indiquen las dos soluciones que obtuvieron. t_1 = ____________ t_2 = ____________

c) ¿Cuál es el valor que responde el problema inicial? Expliquen, en su cuaderno, por qué.

d) Resuelvan, en su cuaderno, la ecuación $5t^2 - 30t - 35 = 0$; usen la fórmula general.

e) ¿Los valores de t_1 y t_2 a los que llegaron son los mismos que obtuvieron por factorización?

f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten las dificultades que afrontaron al resolver las ecuaciones por fórmula general. Escriban una conclusión al respecto.

4. Trabaja con un compañero. Hagan lo que se indica y respondan en su cuaderno.

Pamela quiere hacer un marco para enmarcar un póster de su artista favorito; para ello cuenta con una pieza de madera de 2 m. Sabe que el póster es rectangular y que tiene una superficie de 24 dm². Ella quiere que no le sobre ni le falte madera. ¿De qué longitud deben ser los trozos que cortará?

a) Si se representa como x el largo y como y el ancho, ¿cuál es la ecuación que relaciona el perímetro y cuál es la que relaciona el área del póster? Escríbanlas.

b) Planteen una ecuación cuadrática para resolver el problema.

c) Despejen una incógnita en la ecuación que relaciona el área y sustitúyanla en la ecuación que relaciona el perímetro. Luego simplifiquen la ecuación y escríbanla en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Finalmente resuélvanla por la fórmula general y determinen la longitud de los trozos de listón.

d) Comparen sus respuestas con las de otras parejas; verifiquen si plantearon las mismas ecuaciones que relacionan el perímetro y el área, por ejemplo, si expresaron en decímetros la longitud de 2 m, es decir, como 20 dm.

5. Lean la información.

Para determinar el número de soluciones que tiene una ecuación cuadrática, basta con calcular el **discriminante** (d), es decir, la parte de la fórmula general de la ecuación de segundo grado que está en la raíz cuadrada, esto es:

$$d = b^2 - 4ac$$

- Si d es mayor que cero, la ecuación tiene dos soluciones.
- Si d es cero, la ecuación tiene una solución.
- Si d es menor que cero, la ecuación no tiene solución.

a) De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es el discriminante de $5t^2 - 30t - 35 = 0$? ________

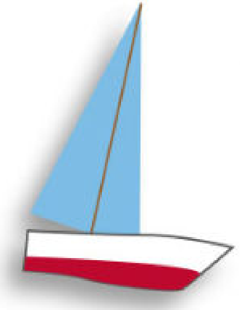
b) ¿Qué indica este discriminante acerca de las soluciones de la ecuación? ________________

____

c) Calculen el discriminante de cada ecuación. Escriban si tienen dos soluciones, una solución o ninguna solución:

Ecuación cuadrática	Discriminante	Tipo de solución
$6x^2 - 5x = -6$	$[\ ]^2 - 4 \cdot [\ ] \cdot [\ ] =$ ______	
$x^2 - 14x + 49 = 0$	$[\ ]^2 - 4 \cdot [\ ] \cdot [\ ] =$ ______	
$2x^2 + x + 3 = 0$	$[\ ]^2 - 4 \cdot [\ ] \cdot [\ ] =$ ______	

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Discutan si es verdad que, a partir del valor del discriminante, es posible saber si una ecuación cuadrática tiene solución y, si la tiene, cuántas son. Justifiquen sus respuestas resolviendo las tres ecuaciones de la tabla.



Profundiza

6. Resuelve el problema.

Un velero de carreras tiene una vela con las siguientes medidas: su área es de 93.75 m², la altura es 8.75 m más larga que su base. Calcula cuánto miden la base y la altura de la vela.

a) ¿Qué forma tiene la vela del barco? ________________________

____

b) Escribe una ecuación que permita calcular los datos que se piden. ____________

c) Explica cómo obtuviste la ecuación. ________________________

____

d) Escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Detalla los pasos que seguiste para obtenerla.

e) ¿Cuál es el discriminante de la ecuación? ________________

f) ¿Qué tipo de solución tiene la ecuación? ________________

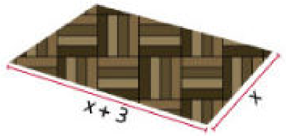
g) Resuelve la ecuación. Utiliza la fórmula general.

h) Determina cuánto miden la base y la altura de la vela. Base = ________________

Altura = ________________

i) Indica, en tu cuaderno, cómo verificarías que tus soluciones son correctas.

7. Resuelve el problema.



El largo de una tarima de madera rectangular es 3 m mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 5 m y el largo aumenta 4 m, el área se triplica. ¿Cuáles son las dimensiones de la tarima?

a) Escribe la ecuación que resuelve el problema. ________________

b) Antes de resolver la ecuación, determina cuántas soluciones tiene. ____________ Justifica tu respuesta.

c) Escríbela en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. ________________

d) Resuélvela usando la fórmula general.

e) Indica las medidas de la tarima. Largo = __________ Ancho = __________

f) Explica cómo verificarías que encontraste la solución del problema.

8. Compara tus ecuaciones y soluciones con las de tus compañeros. Comenten, en cada caso, cómo obtuvieron la ecuación cuadrática que modela el problema. Analicen las dificultades y errores que tuvieron al plantear la ecuación y al resolverla. Discutan cómo encontraron la solución a partir de las dos raíces que obtuvieron con la fórmula general y cómo la verificaron.

9. Determina cuántas soluciones tiene cada ecuación. Luego, resuélvelas por la fórmula general y corrobora tus respuestas.

a) $3x^2 + 2x - 8 = 0$ b) $x^2 + 2x - 3 = 0$ c) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ d) $-2x^2 + 3x - 10 = 0$

10. ¿Qué valor debe tener a en la ecuación $ax^2 + 6x - 3 = 0$, para que las soluciones sean iguales?

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-125a. Lee la información sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas por medio de la factorización y la fórmula general. Escribe en el cuaderno tus conclusiones sobre cuándo es más conveniente usar cada método. Compáralas con las de un compañero.

Entra a www.redir.mx/matret3-125b. Analiza las actividades sobre la fórmula general. Escribe tus conclusiones en el cuaderno. Comenta tus dudas con el profesor.

Un terreno rectangular tiene 12 m de largo y 4 m de ancho. Al aumentar el largo y el ancho en una misma cantidad, el área aumenta 57 m². ¿Cuánto se ha aumentado en cada dimensión?

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 22 en la bitácora de la página 166.

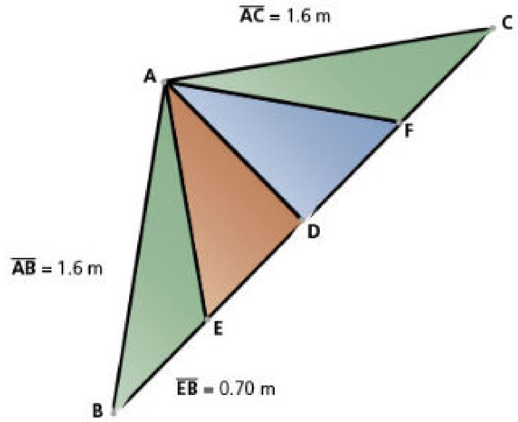
Eje: forma, espacio y medida
Tema: figuras y cuerpos

Contenido

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

Diseños con vidrio templado

El arquitecto Balderas trabaja en una constructora. Le solicitaron una propuesta de diseño para el motivo que decorará la entrada del patio de las casas que están construyendo. Él hizo el bosquejo que se muestra. Para su diseño, el arquitecto indica que la base del ΔABC se debe dividir en partes iguales. Además, $\overline{AB} = \overline{AC}$.



1. Observa el bosquejo que dibujó el arquitecto y responde lo que se indica. Justifica en tu cuaderno.

a) Explica por qué ∢ABC = ∢ACB.

b) Justifica las siguientes afirmaciones. En cada caso, indica el criterio de congruencia que utilizaste.

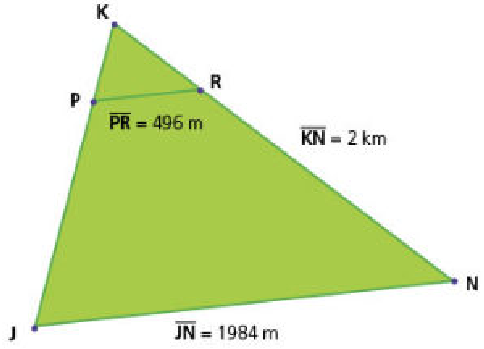
i. El ΔABE es congruente al ΔACF.

ii. El ΔAED es congruente al ΔAFD.

iii. Si el ∢ADB es recto, entonces los ΔADB y ΔADC son congruentes entre sí.

c) Compara tus argumentos con los de tus compañeros. Comenten si todos utilizaron el mismo criterio de congruencia. Justifiquen por qué es suficiente mostrar un bosquejo del diseño, es decir, en este caso, no es necesario conocer el trazo exacto.

2. Observa la figura y responde lo que se indica. Justifica tus respuestas en el cuaderno.



a) El diagrama representa la intersección de algunas calles. La que representa el segmento $\overline{PR}$ es paralela a la que representa el segmento $\overline{JN}$. Un automóvil está en el punto **K**.

i. ¿Qué distancia debe recorrer para llegar al punto **R**?

ii. ¿Qué distancia debe recorrer para ir del punto **R** al punto **N**?

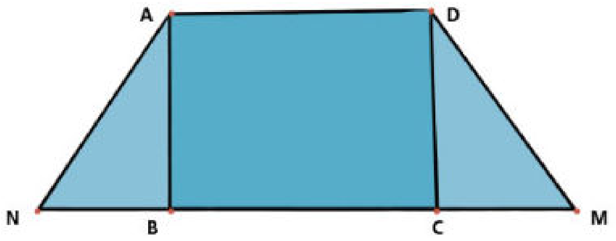
b) ¿Es posible conocer la distancia entre los puntos **K** y **P**?

c) Compara tus argumentos con los de tus compañeros. Comenten cómo determinaron las distancias que se solicitan. Indiquen si usaron algún criterio de congruencia o de semejanza para responder.

Un paso adelante

3. Trabaja con un compañero. Observen las figuras. Hagan lo que se indica y justifiquen sus respuestas en su cuaderno.

a) El arquitecto Balderas bosquejó otro diseño. Sus indicaciones fueron que el cuadrilátero **ABCD** es un rectángulo y que ∢**ANB** = ∢**DMC**. Completa la justificación de que los Δ**ABN** y **DCM** son congruentes.



i. ∢**ANB** = ∢**DMC** porque ______

ii. El ∢**ABN** mide ______ porque ______

______

______

iii. El ∢**DCM** mide ______ porque ______

______

______

iv. ∢**NAB** = ∢**MDC** porque ______

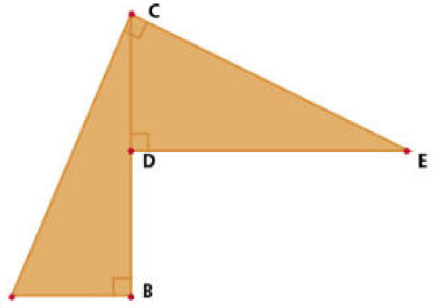
______

______

v. Los Δ**ABN** y **DCM** son congruentes porque ______

______

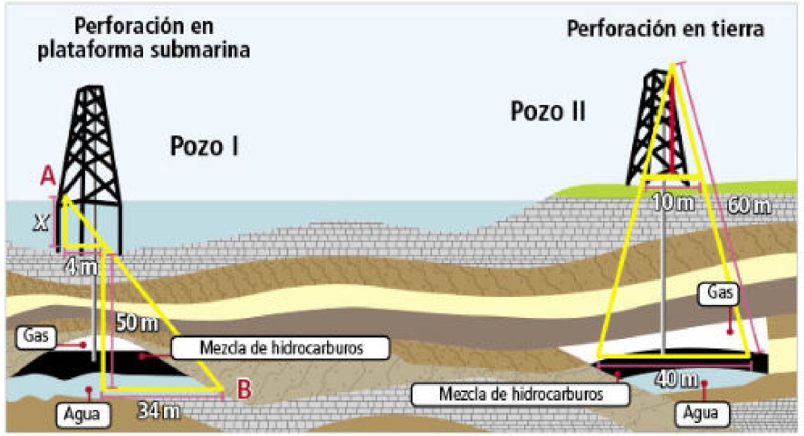
b) Otro arquitecto bosquejó una propuesta para el diseño de dos albercas que estarán en la zona común. Se quiere que los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$ midan lo mismo, que $\overline{CD}$ mida 9 m y $\overline{DB}$ mida 12 m. ¿Cuál es la medida de $\overline{DE}$? Explica tu respuesta en detalle.



c) Reúnanse con otra pareja para comparar lo que argumentaron en los incisos a) y b). Discutan si su argumentación está completa y, si es necesario, compleméntenla para que escriban una sola.

4. Trabaja con un compañero. Analicen la situación y resuelvan lo que se solicita. Respondan y justifiquen en su cuaderno.

a) La imagen esquematiza una manera de extraer petróleo de pozos que se encuentran en el subsuelo. Se sabe que hay pozos petroleros de hasta 6 000 m de profundidad. Analicen la imagen y determinen la altura de la torre de petróleo, denotada como *x*.



i. Respecto al pozo I, ¿cuál es la distancia del punto A al punto B? Describan en detalle el procedimiento de solución.

ii. Si el pozo I midiera 60 m de profundidad, ¿se alteraría la medida de la altura de la torre de petróleo (*x*)? Expliquen.

iii. ¿Cuál es la altura de la torre del pozo II (segmento rojo)?

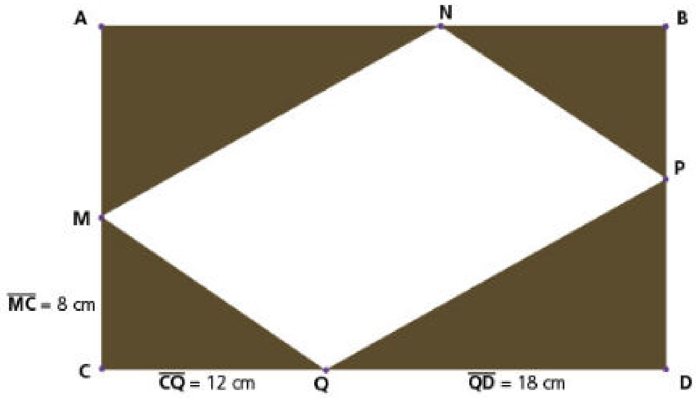
iv. ¿Cuál es la profundidad escavada del pozo II, en metros?

b) Compara tus argumentaciones con tus compañeros. Comenten cómo determinaron las distancias que se solicitan. Indiquen si usaron algún criterio de congruencia o de semejanza para responder.

Profundiza

5. Trabaja con un compañero. Analicen la situación, discutan y resuelvan lo que se solicita. Justifiquen sus respuestas en el cuaderno.

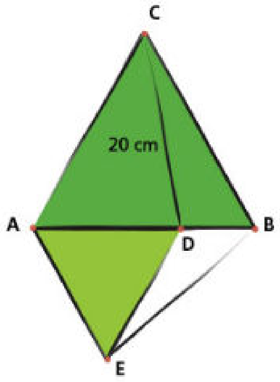
a) Un carpintero elabora alhajeros de madera con placas de ónix. El esquema de abajo representa la tapa de uno de ellos. El área de color café representa la madera; el área blanca, el ónix. El cuadrilátero **NMPQ** es un paralelogramo.



i. Indiquen qué parejas de triángulos son semejantes o congruentes. Justifiquen su respuesta.

ii. Si $\overline{PD}$ mide *y*, ¿cuál es la medida del perímetro de la placa de ónix que llevará el alhajero?

b) Observen la figura a la derecha. Se sabe que **ABC** y **ADE** son triángulos equiláteros. Calculen la medida de $\overline{EB}$. Detallen el procedimiento en su cuaderno.



i. Indiquen qué parejas de triángulos son congruentes y cuáles son semejantes. Expliquen los criterios que usaron para determinarlo.

c) Analicen sus justificaciones y procedimientos. Para los dos problemas iniciales, escriban una justificación de lo que se pide y compárenla con la que ustedes desarrollaron. Comenten las dificultades que afrontaron al resolver las actividades de la lección.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-129a. Lee la información y efectúa las actividades. Identifica los conceptos que todavía no tengas claros y coméntalos con tu profesor.

Explora www.redir.mx/matret3-129b. Efectúa las actividades sobre congruencia. Comenta, con tus compañeros, las dificultades que tuviste.

El ángulo desigual de dos triángulos isósceles mide 40°. ¿Los triángulos son semejantes o congruentes?

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 23 en la bitácora de la página 166.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: figuras y cuerpos

Contenido

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales

El ventanal

En una constructora, los arquitectos están diseñando casas como la que se muestra. En la fachada se han hecho divisiones con segmentos de madera para colocar las ventanas.

1. Trabaja con dos compañeros. Analicen y discutan lo que se propone. Respondan lo que se pide.

a) ¿Cómo son entre sí las rectas que pasan por los segmentos verdes? Expliquen su respuesta.

____

b) ¿Cómo son las rectas que pasan por los segmentos rojos respecto a las que pasan por los verdes? Expliquen su respuesta. ____

____

c) Los segmentos verdes están igualmente espaciados. Estos tres dividen a cada segmento rojo en dos partes. ¿Cómo son estas partes? Expliquen su respuesta. _______________________________

____

d) Discutan y propongan una manera de comprobar si hay alguna relación entre las longitudes en que quedan divididos los dos segmentos rojos. Escriban sus conclusiones en el pizarrón y luego respondan.

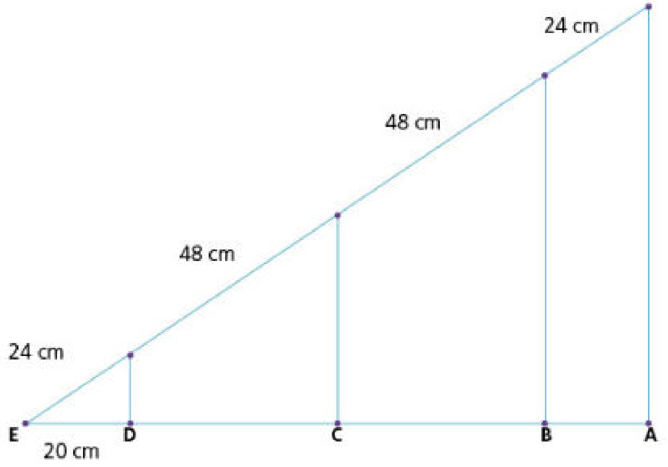
i. ¿La relación que establecieron tiene que ver con el tipo de rectas identificadas en a) y b)?

ii. Érick, alumno de tercero de secundaria, propuso modelar geométricamente la ventana de la casa para explicar el tipo de relación entre las medidas de las divisiones. Él afirma que, sin medir, se puede indicar que las medidas de las separaciones son iguales. ¿Qué piensan de esta afirmación?

Un paso adelante

2. Analicen la situación. Efectúen lo que solicita y justifiquen las respuestas en su cuaderno.

a) La siguiente construcción geométrica es el diseño de una ventana.



i. Completen la construcción etiquetando como D´, C´, B´ y A´ a los puntos que se corresponden con **D, C, B** y **A**. Expliquen en su cuaderno cómo seleccionaron su posición y la correspondencia.

ii. Indiquen cuáles son los tres triángulos semejantes al **ΔA´AE**. Justifiquen por qué son semejantes.

iii. Completen la tabla. Los segmentos de cada renglón deben ser correspondientes.

Segmento sobre el lado $\overline{EA}$		Segmento correspondiente en el lado $\overline{EA'}$	
Lado	**Medida (cm)**	**Lado**	**Medida (cm)**
$\overline{ED}$		$\overline{ED'}$	
$\overline{DC}$	40	$\overline{D'C'}$	
$\overline{CB}$		$\overline{C'B'}$	
$\overline{BA}$		$\overline{B'A'}$	
$\overline{DB}$		$\overline{D'B'}$	
$\overline{EC}$		$\overline{EC'}$	

iv. Expliquen, en su cuaderno, cómo encontraron las medidas.

v. Analicen la tabla. ¿Qué relación hay entre las medidas del lado $\overline{EA}$ con sus correspondientes en el lado $\overline{EA'}$?

vi. Justifiquen por qué las medidas de los segmentos sobre el lado $\overline{EA}$ son proporcionales a las de los segmentos sobre el lado $\overline{EA'}$. Indiquen la razón de proporcionalidad.

b) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros Discutan la forma en que encontraron las medidas que se solicitaron. Comenten qué dificultades tuvieron para hacerlo.

Profundiza

3. Lee y discute la información con el grupo.

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por rectas transversales, las medidas de los segmentos que se forman en una recta transversal son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes en otra.

Esto se conoce como el **teorema de Tales**.

i. Indiquen si en las actividades 1 y 2 se cumple el teorema de Tales. Identifiquen las rectas transversales y las paralelas.

ii. Escriban las relaciones matemáticas que se pueden obtener a partir del teorema de Tales. Usen la figura de la actividad 2.

4. Trabaja con un compañero. Efectúa lo que se indica.

a) Lean las instrucciones para dividir un segmento en cinco partes iguales sin necesidad de medirlo.

i. Tracen un segmento en una hoja blanca, del tamaño que deseen, nombren P y Q a los extremos del segmento. Éste es el que dividirán en cinco partes.

ii. Tracen un rayo que pase por P, y que no coincida con la recta $\overline{PQ}$. El final del rayo debe quedar a la altura del punto Q.

iii. Abran su compás a cualquier medida y tracen un arco con centro en P. Llama P_1 a la intersección del arco con el rayo.

iv. Mantengan la abertura del compás (sin aumentarla, ni disminuirla), tracen otro arco con centro en P_1. Nombren P_2 a la intersección de este arco con el rayo. Continúen de esta manera para trazar P_3, P_4 y P_5.

v. Unan P_5 con Q y tracen cuatro líneas paralelas a $\overline{P_5Q}$ que pasen por los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4. Prolónguenlas hasta que intersequen al segmento $\overline{PQ}$.

vi. Las cuatro rectas paralelas dividirán al segmento $\overline{PQ}$ en 5 partes iguales.

b) Sin medir, ¿cómo pueden justificar que las medidas de los segmentos obtenidos sobre $\overline{PQ}$ son iguales? Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

c) Escriban en su cuaderno las instrucciones para dividir un segmento en cuatro partes, de tal manera que las tres primeras midan lo mismo y la última de ellas mida lo mismo que las otras tres juntas.

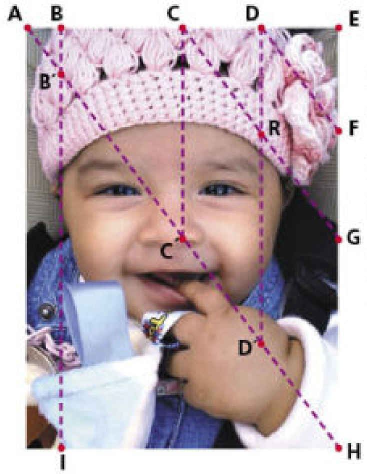
d) Comparen las respuestas a los incisos b) y c) con las de sus compañeros.

i. Discutan cuáles de las justificaciones e instrucciones están completas y qué les falta a las demás.

ii. Expliquen, con base en el teorema de Tales, cómo es que su construcción efectivamente localiza el punto buscado.

5. Analicen, discutan y resuelvan lo que se solicita.

a) En la fotografía se ha iniciado el trazo de algunas formas geométricas para formar un rompecabezas.



$\overline{AB}$ = 2.01 cm

$\overline{CA}$ = 9 cm

$\overline{CD}$ = 4.5 cm

$\overline{ED}$ = 4.5 cm

$\overline{DF}$ = 7 cm

$\overline{AH}$ = 30 cm

i. ¿Cuál es la medida de $\overline{EH}$? ____________

ii. Justifiquen, en su cuaderno, cómo calcularon su medida.

iii. ¿Cuáles son las medidas de la pieza CDD'C'? ____________

____

iv. Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

b) Tracen un segmento de recta en tres partes, de manera que la tercera mida lo doble de la segunda y la segunda mida lo doble de la primera. Escriban, en su cuaderno, las instrucciones para hacerlo.

c) Tracen un segmento y localicen el punto que se encuentra a tres séptimos de su longitud. Describan, en su cuaderno, el procedimiento que siguieron.

d) Comenten sus experiencias en clase y registren las ventajas de aplicar el teorema de Tales en la resolución de problemas como los estudiados.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-133a. Observa el video sobre el teorema de Tales. Si tienes dudas, consulta las conclusiones que escribieron en esta lección.

Explora www.redir.mx/matret3-133b. Efectúa las actividades. Comenta tus dudas con un compañero y con tu profesor.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 24 en la bitácora de la página 166.

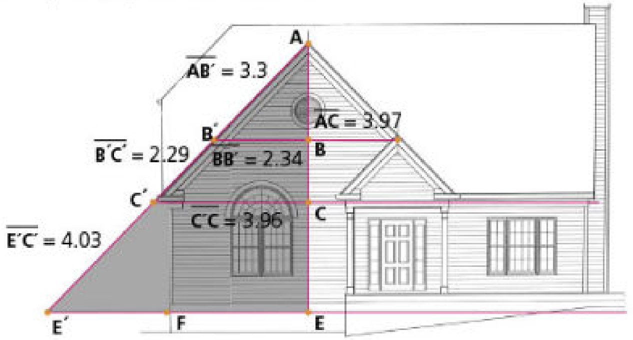
Eje: forma, espacio y medida
Tema: figuras y cuerpos

Contenido

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales

La altura de la casa

Diego es estudiante de arquitectura. Él y sus amigos se reúnen los fines de semana en casa de su asesor, el arquitecto Balderas, quien les plantea diferentes retos y desafíos. El desafío propuesto es el siguiente: el esquema representa el plano de una casa. Se ha trazado el triángulo rectángulo AEE′ y se han colocado algunas medidas en metros, con estos datos. ¿Se puede determinar la altura de la casa (desde el piso a la punta de la fachada)?



1. Trabaja con un compañero. Analicen y discutan lo que se propone.

a) Si respondieron afirmativamente la pregunta anterior, expliquen cómo obtener la medida de la altura. ______________________

b) Si respondieron que no se puede determinar la medida de la altura de la casa, expliquen por qué. En sus argumentos consideren si faltan datos (cuáles) o si sobran: ______________________

c) Retomen los datos que proporciona el ΔAEE′. Se conoce la longitud de $\overline{AC}$: ______. También se conoce la longitud de $\overline{AC'}$: ____________ y la medida de $\overline{AE'}$: ____________

i. ¿Se pueden relacionar las medidas anteriores para determinar la medida de la altura de la casa? Respondan en su cuaderno.

ii. Establezcan una relación de igualdad entre las razones asociadas a las medidas de los segmentos. Expliquen, en su cuaderno, qué consideraron para determinar cada razón y establecer la igualdad solicitada.

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

iii. Obtengan el cociente de la primera razón. ¿Qué significado pueden darle al resultado?

iv. ¿Cuál es la medida de longitud de $\overline{AE}$? Explíquenlo en su cuaderno.

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten si hay otros cocientes que se puedan usar para determinar la altura de la casa.

Un paso adelante

2. Analiza los problemas y su modelación geométrica. Efectúa lo que se solicita y justifica en tu cuaderno.

a) Diego estableció la siguiente igualdad entre razones para obtener la medida del segmento $\overline{AE}$.

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AC'}}$$

i. Sustituye $\overline{AE}$ por la literal *x* y a los otros segmentos por sus respectivas medidas.

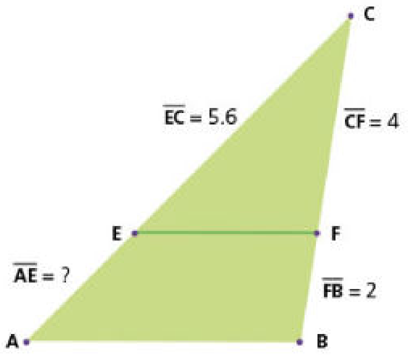
ii. Resuelve la ecuación para obtener el valor de la medida de $\overline{AE}$.

iii. ¿Qué sucede si en la igualdad se establece la razón que considera la longitud mayor (9.62) entre la longitud menor (3.97)? Plantea la nueva ecuación.

iv. ¿Es correcta la igualdad establecida? Justifica tu respuesta.

v. ¿Para esta solución fue necesario el teorema de Tales? Explica.

b) Dado el ΔABC, la recta que pasa por los puntos E y F es paralela al lado $\overline{AB}$ del ΔABC.



i. El lado $\overline{AC}$ del ΔABC quedo dividido en dos segmentos, ¿cuáles son? ______________

ii. ¿Cuántas veces es mayor la longitud $\overline{CF}$ respecto a la de $\overline{FB}$? __________

iii. Según el teorema de Tales, ¿cuántas veces deberá ser mayor la longitud de $\overline{CE}$ respecto a la longitud de $\overline{EA}$? Justifica tu respuesta.

iv. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{AE}$? __________

v. Calcula la medida del segmento $\overline{AE}$, dadas las medidas que se indican para los otros segmentos.

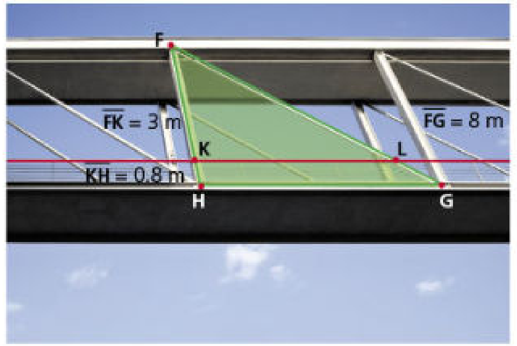
- $\overline{CF}$ = 5.5 cm, $\overline{FB}$ = 5.5 cm, $\overline{CE}$ = 6.1 cm, $\overline{AE}$ = ____________
- $\overline{CF}$ = 36 cm, $\overline{FB}$ = 72 cm, $\overline{CE}$ = 36.63 cm, $\overline{AE}$ = ____________

c) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten si hay sólo una igualdad de cocientes que pueda plantearse a partir del teorema de Tales.

Profundiza

3. Trabaja con dos compañeros. Analicen, respondan y justifiquen lo que se solicita.

a) Para la construcción del puente que se muestra se utilizaron barras de solera para formar las estructuras triangulares (resaltadas en color verde). El barandal corresponde al segmento $\overline{KL}$ (recta roja).



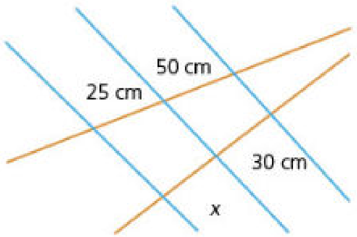
i. ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{FL}$? ____________

ii. ¿Cuál es la del segmento $\overline{LG}$? ____________

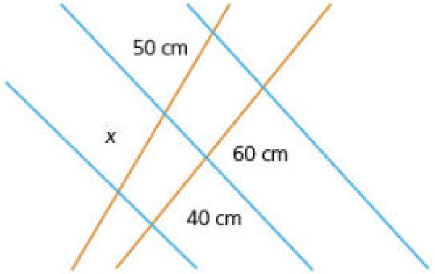
iii. Expliquen su respuesta. ____

____

b) En las siguientes construcciones geométricas, las rectas azules son paralelas. Determinen el valor de *x*. Justifiquen las respuestas en su cuaderno.

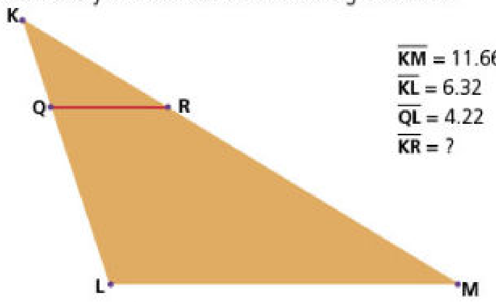


x vale: ____________



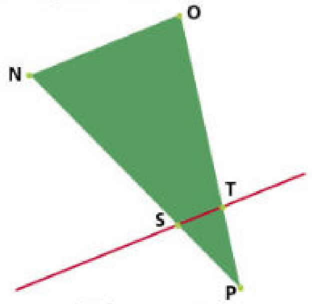
x vale: ____________

c) Analiza los datos del ΔKLM y determina la medida del segmento $\overline{KR}$.



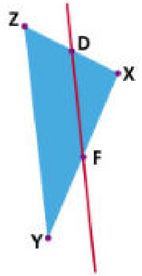
$\overline{KM}$ = 11.66
$\overline{KL}$ = 6.32
$\overline{QL}$ = 4.22
$\overline{KR}$ = ?

d) ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{PS}$?



$\overline{PN}$ = 9.9
$\overline{TO}$ = 6.47
$\overline{TP}$ = 2.75
$\overline{PS}$ = ?

e) ¿Cuál es la medida del lado $\overline{XZ}$ del ΔXYZ?



$\overline{XD}$ = 2.24
$\overline{XF}$ = 3.81
$\overline{FY}$ = 3.81
$\overline{XZ}$ = ?

f) Comenten sus experiencias en clase y registren sus acuerdos respecto a la resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

TIC

Descarga el documento en www.redir.mx/matret3-137a. Lee la información sobre el teorema de Tales y efectúa las actividades. Escribe una conclusión sobre la relación del teorema de Tales con la semejanza.

Explora www.redir.mx/matret3-137b. Resuelve los ejercicios sobre el teorema de Tales. Comenta tus respuestas y conclusiones con dos compañeros.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 25 en la bitácora de la página 166.

Traza un triángulo de 12.5 cm de base y 17 cm de alto. Denomínalo **ABC**. Ubica el punto medio de **AB**, nómbralo **B′** y traza un segmento paralelo a **BC** que pase por **B′**.

Demuestra, utilizando el teorema de Tales, que los lados del triángulo **AB′C′** son proporcionales a los del triángulo **ABC**.

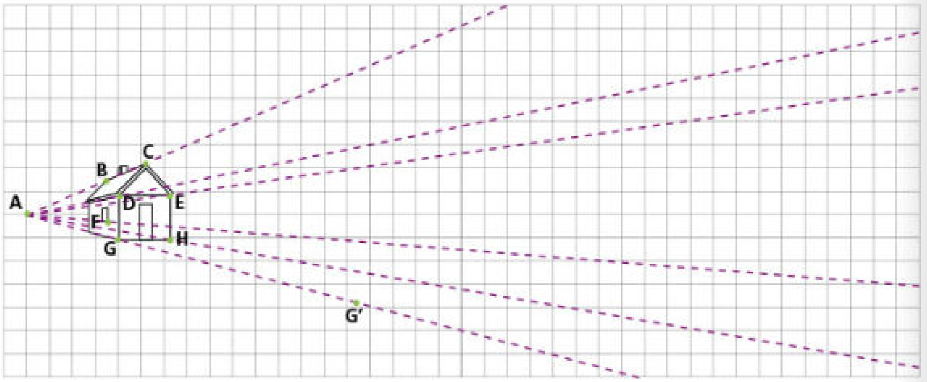
Eje: forma, espacio y medida
Tema: figuras y cuerpos

Contenido

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

El punto de fuga

Xelito cursa el taller de dibujo técnico en la secundaria a la que asiste. Ella quiere construir una casa semejante a la original; para ello decide emplear una estrategia similar al *punto de fuga*. Ésta consiste en trazar varias rectas de manera que pasen por el punto **A** (el punto de fuga) y por varios puntos de la imagen original.



Original (C_1)

1. Trabaja con un compañero. Analicen la figura y efectúen lo que se indica.

a) En la figura se ha señalado el punto **G'**, correspondiente a **G**. Midan la distancia entre los puntos **G** y **A**, y los puntos **G'** y **A**.

Medida de $\overline{GA}$ ________ Medida de $\overline{G'A}$ ________ $\frac{\overline{GA}}{\overline{G'A}}$ = ________

b) Usen las rectas que pasan por el punto **A** para trazar una figura, semejante a la casa, cuya razón de semejanza sea igual a 2.5. Usen **B'**, **C'**, **D'**, **E'**, **F'** y **H'** para nombrar a los puntos correspondientes a **B**, **C**, **D**, **E**, **F** y **H**. Señalen los demás puntos de forma similar y tracen más rectas si es necesario.

c) Expliquen cómo trazaron las figuras semejantes a la ventana y a la puerta. ________________

____

____

d) Indiquen la razón de proporcionalidad en la tabla y la relación entre los ángulos en las figuras.

Polígonos	Razón de proporcionalidad de la medida de sus lados respecto al original	Medida de los ángulos correspondientes respecto al original
$\Delta C'D'E'$		
Rectángulo D'E'G'H'		
Rectángulo (puerta)		

e) Con la ayuda de su profesor discutan sus respuestas con el resto del grupo; consideren qué propiedades geométricas de las figuras varían y cuáles se mantienen.

Un paso adelante

2. Forma equipo con dos compañeros. Efectúen lo que se solicita.

a) Dado el punto **O**, tracen tres rectas que pasen por él, llámenlas r_1, r_2 y r_3, con la única condición de que no se sobrepongan.

O

i. Tracen, con un compás, una semicircunferencia con centro en el **O**, que mida 3 cm de radio y pase por las rectas r_1, r_2 y r_3. Señalen los puntos de intersección entre la semicircunferencia y las rectas, llámenlos **A**, **B** y **C**.

ii. Unan con segmentos de recta el punto **A** y el **B**, el **B** y el **C**, el **C** y el **A**. ¿Qué polígono se forma?

iii. Usen el compás para trazar una semicircunferencia con centro en **O**, que mida más de 3 cm de radio y pase por las rectas r_1, r_2 y r_3. Marquen los puntos de intersección entre las semicircunferencias y las rectas, llámenlos A_1, B_1 y C_1.

b) ¿Qué polígono se obtuvo al trazar los segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$ y $\overline{C_1A_1}$? ________________

c) Completen la tabla.

Medida del segmento		Cociente
$\overline{OA_1}$ = ______	$\overline{OA}$ = ______	$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}}$ = ______
$\overline{OB_1}$ = ______	$\overline{OB}$ = ______	$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB}}$ = ______
$\overline{OC_1}$ = ______	$\overline{OC}$ = ______	$\frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC}}$ = ______

d) ¿Cómo son las medidas de los cocientes al compararlas? ________________

e) ¿Qué relación existe entre el ΔABC y el $\Delta A_1B_1C_1$? ________________

f) Tracen las rectas que pasan por $\overline{AB}$ y por $\overline{A'B'}$, ¿qué relación existe entre esas rectas? ________

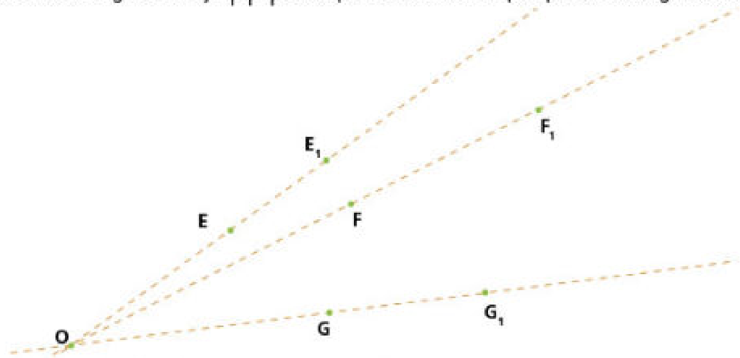
________________________ ¿Ocurre lo mismo con las rectas que pasan por $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$, y por $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$? Justifiquen la respuesta en su cuaderno.

g) Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Consideren que el punto **O** se llama *centro de homotecia* y el $\Delta A'B'C'$ es homotético al ΔABC. Describan las características de dos figuras homotéticas. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Profundiza

3. Trabaja con dos compañeros. Efectúen lo que se indica. Respondan en su cuaderno.

a) Tracen los triángulos **EFG** y $E_1F_1G_1$. Justifiquen en su cuaderno por qué estos triángulos son semejantes.

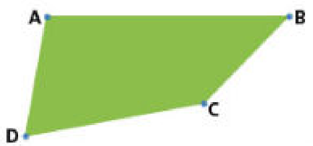


i. Indiquen la razón de semejanza entre los triángulos. ____________________

ii. ¿Cuál es la relación entre las rectas que pasan por $\overline{FG}$ y $\overline{F_1G_1}$? Justifiquen la respuesta en su cuaderno y también describan la relación entre las rectas que pasan por $\overline{EG}$ y $\overline{E_1G_1}$, y por $\overline{EF}$ y $\overline{E_1F_1}$.

b) Consideren como centro de homotecia el punto O y tracen un $\Delta E_2F_2G_2$, cuya razón de semejanza sea de $\frac{1}{2}$ respecto a **ΔEFG**. Expliquen, en su cuaderno, los pasos del procedimiento que siguieron para hacerlo.

c) Observen la figura. Tracen una semejante a ella (nómbrenla **A'B'C'D'**) de manera que los lados correspondientes sean paralelos. La razón de semejanza debe ser de $\frac{1}{3}$.



i. Tracen las rectas que pasan por los puntos correspondientes y prolónguenlas hasta que se corten.

¿Qué observan? ____________________

4. Organiza una plenaria con el grupo para leer, discutir y analizar la siguiente información.

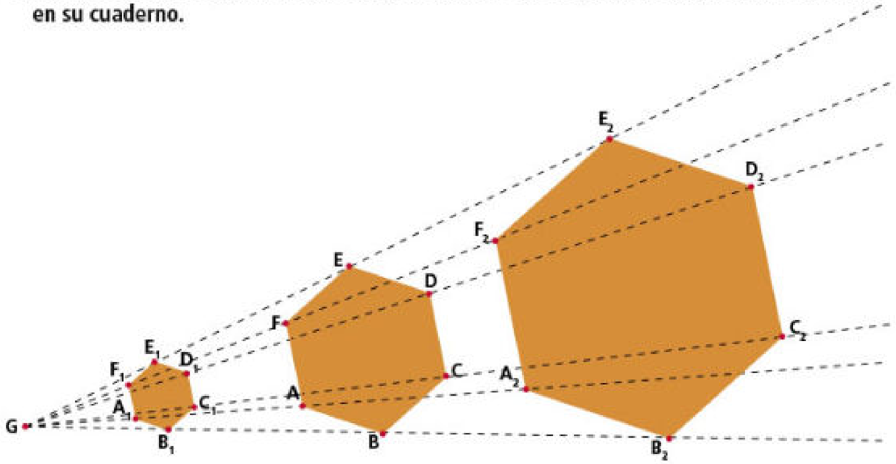
Cuando en dos figuras semejantes las rectas que pasan por los lados correspondientes son paralelas, se dice que las figuras son **homotéticas** entre sí. La razón de semejanza se llama entonces **razón de homotecia**.

Las rectas que pasan por los vértices correspondientes de las figuras se unen en un punto **O**, que se llama **centro de homotecia**.

Al medir la distancia de cada vértice al centro de homotecia, se encuentra una relación de proporcionalidad entre las distancias de los vértices de una figura homotética y las distancias de los vértices de la figura original.

a) Comenten las dudas y discutan cómo debe ser una homotecia para que se amplíe la figura original y cómo debe ser para que se reduzca. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

5. Trabaja con un compañero. Analicen y discutan lo que se pide. Justifiquen las respuestas en su cuaderno.



a) Consideren el hexágono **ABCDEF** como el polígono original. Respondan sin hacer mediciones.

i. ¿Los polígonos son homotéticos?

ii. ¿En qué hexágonos la razón de homotecia es 0.4? ¿En cuál es 1.8?

iii. Si se considera al hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ como la figura original, ¿cuál es la razón de homotecia de los otros dos hexágonos respecto a éste?

iv. Si se considera al hexágono $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ como la figura original, ¿cuál es la razón de homotecia de los otros dos hexágonos respecto a éste?

b) Midan la distancia de todos los vértices al centro de homotecia. Comprueben que existe una relación de proporcionalidad entre las distancias e indiquen cuáles son las constantes de proporcionalidad.

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Argumenten cómo calcularon las razones de homotecia que se piden en los puntos iii y iv del inciso a).

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-141a. Trabaja con el recurso interactivo. Efectúa las actividades, anota tus dudas y coméntalas con un compañero. Revisen la lección para aclararlas.

Explora www.redir.mx/matret3-141b. Después de construir las figuras homotéticas, escribe un resumen en tu cuaderno y comenta tus dudas con un compañero y con el profesor.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 26 en la bitácora de la página 166.

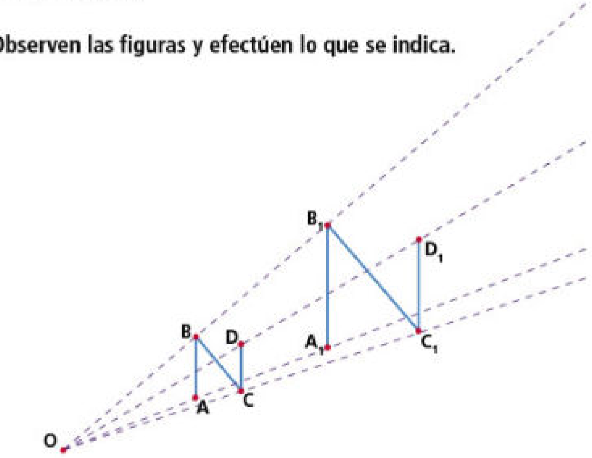
Eje: forma, espacio y medida
Tema: figuras y cuerpos

Contenido

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

Del otro lado

1. Observen las figuras y efectúen lo que se indica.



a) Expliquen por qué las figuras son homotéticas. Justifiquen la respuesta en su cuaderno.

i. Si consideran la figura **ABCD** como la original, ¿cuál es la razón de homotecia? __________

ii. Si consideran la figura $A_1B_1C_1D_1$ como la original, ¿cuál es la razón de homotecia? ________

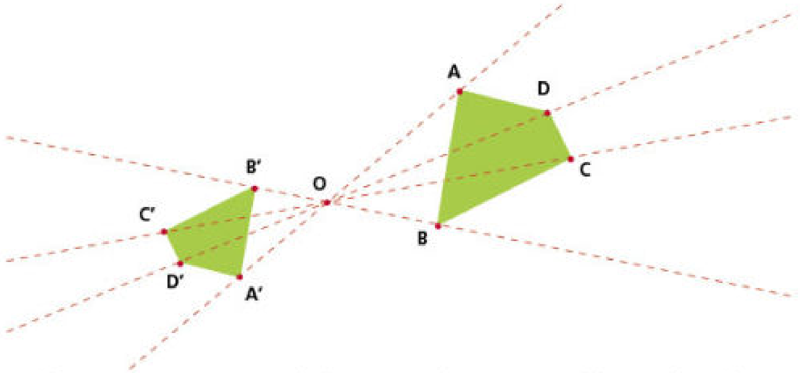
iii. ¿Cuál es la relación entre estas dos razones?

iv. ¿Cuál es el valor del cociente $\dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{OB}}$? ________

v. Determinen el valor de los cocientes sin hacer ninguna medición.

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = \_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC}} = \_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{\overline{OD_1}}{\overline{OD}} = \_\_\_\_\_\_$$

b) Observen la figura de abajo. Consideren que la imagen original es **ABCDE**.



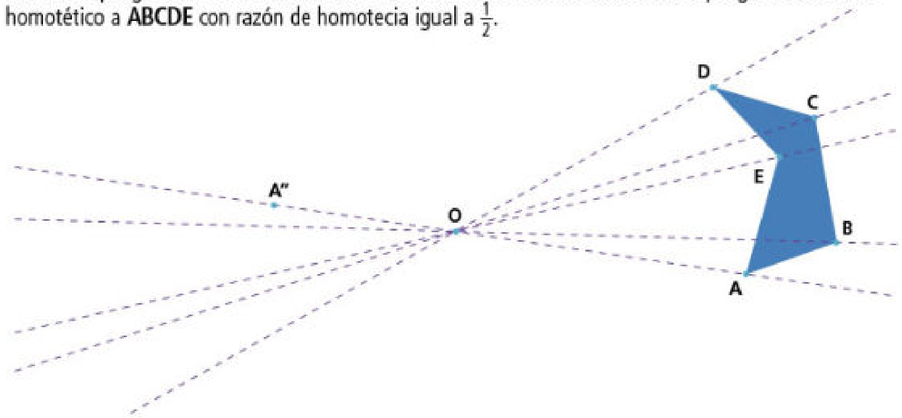
i. ¿Las figuras son semejantes? ¿Los lados correspondientes son paralelos? Justifiquen la respuesta en su cuaderno.

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Verifiquen que sean correctas y expliquen los procedimientos que usaron para responder. Describan las características de dos figuras homotéticas si la razón de homotecia es igual a 1. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Un paso adelante

2. Analiza la situación y efectúa lo que se indica. Responde en tu cuaderno.

Observa el polígono **ABCED**. Considera a **O** como el centro de homotecia. Traza el polígono **A'B'C'D'E'** homotético a **ABCDE** con razón de homotecia igual a $\frac{1}{2}$.



a) Del lado izquierdo del centro de homotecia **O**, traza el polígono **A"B"C"D"E"** semejante a **ABCDE** con razón de semejanza igual a $\frac{3}{4}$. El punto **A"** ya está trazado.

b) Verifica que los lados correspondientes de los tres polígonos sean paralelos.

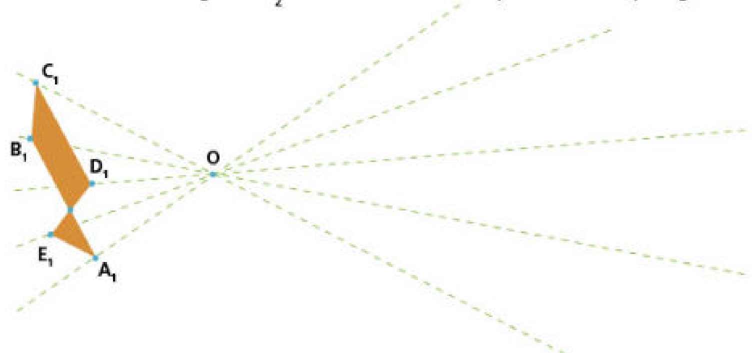
c) Compara tus trazos con los de un compañero. La figura **A"B"C"D"E"** es homotética respecto a la figura **ABCDE**, pero en este caso la razón de homotecia se define con signo negativo. ¿Cuál es la razón de homotecia ente estas figuras? __________

d) Describan las características de dos figuras homotéticas si la razón de homotecia es negativa.

____

____

e) Observen el polígono $A_1B_1C_1D_1E_1$. Tracen un polígono homotético con razón de homotecia igual a -1 y otro con razón de homotecia igual a $-\frac{3}{2}$. Describan en detalle el procedimiento que siguieron.

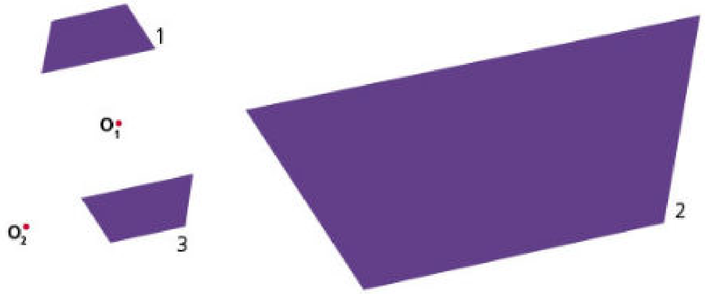


f) Comenten en clase sus dudas y dificultades. Anoten sus acuerdos sobre las características de una homotecia cuando la razón de ésta es negativa.

Profundiza

3. Trabaja con dos compañeros. Observen las figuras y hagan lo que se indica.

a) Las figuras son homotéticas. O_1 y O_2 son centros de homotecia.



i. ¿De qué figuras es O_1 el centro de homotecia? ____________

ii. ¿Y O_2? ____________

iii. ¿Cuál es la razón de homotecia del polígono 3 respecto al 2? ____________

iv. ¿Cuál es la razón de homotecia del polígono 1 respecto al 3? ____________

v. Identifiquen el centro de homotecia de las figuras 1 y 2.

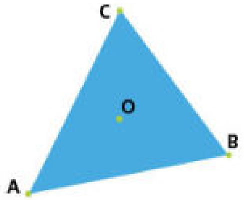
vi. Consideren que un polígono **A** es homotético al polígono **B** con centro de homotecia **O**, y **A** es homotético al polígono **C** con centro de homotecia **P**. ¿Qué concluyen respecto a los polígonos

B y C? ____

____

____

b) Consideren el Δ**ABC** y el punto **O** como centro de homotecia.



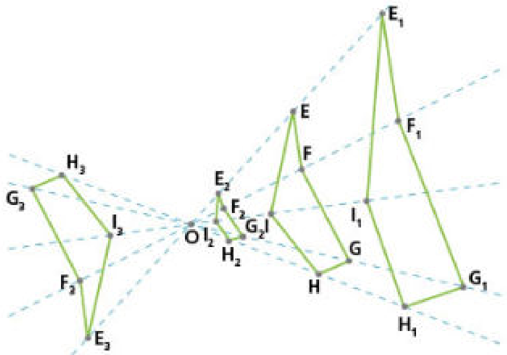
i. Tracen un triángulo homotético con razón de homotecia igual a $\frac{1}{2}$ y otro con razón de homotecia igual a 1.8.

ii. Tracen el triángulo homotético con razón de homotecia igual a –1.

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten las características de las figuras homotéticas cuando el centro de homotecia está situado dentro de la figura original.

4. Observa las figuras y haz lo que se indica.

a) Observa las construcciones homotéticas. Sin medir, determina si lo afirmado en la tabla es verdadero o falso. Justifica cada respuesta en tu cuaderno. Considera el polígono **EFGHI** como la figura original.



Afirmación	¿Verdadera o falsa?
1. La razón de homotecia para obtener el polígono $E_2F_2G_2H_2I_2$ es mayor a 1.	
2. La razón de homotecia para obtener el polígono $E_1F_1G_1H_1I_1$ es mayor a 1.	
3. La razón de semejanza del polígono original respecto a $E_3F_3G_3H_3I_3$ es mayor a 1.	
4. La razón de homotecia para obtener el polígono $E_1F_1G_1H_1I_1$ a partir del polígono $E_2F_2G_2H_2I_2$ es menor a 1.	
5. La razón de homotecia para obtener el polígono $E_1F_1G_1H_1I_1$ a partir de $E_3F_3G_3H_3I_3$ está entre 0 y –1.	
6. Las medidas de las longitudes de los segmentos $\overline{EF}$, $\overline{E_1F_1}$ y $\overline{E_2F_2}$ son proporcionales.	
7. Las medidas de los ángulos internos de los polígonos $E_1F_1G_1H_1I_1$ y $E_2F_2G_2H_2I_2$ son diferentes.	
8. Las medidas de los segmentos $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OG}$, $\overline{OH}$, $\overline{OI}$ son proporcionales a las medidas de $\overline{OE_1}$, $\overline{OF_1}$, $\overline{OG_1}$, $\overline{OH_1}$, $\overline{OI_1}$.	
9. Entre dos figuras homotéticas se pueden establecer dos razones de homotecia. Al sumarlas se obtiene 1 como resultado.	

b) Compara tus respuestas con el resto del grupo. Discutan sus argumentos y, con la ayuda de su profesor, lleguen a conclusiones.

A una figura **A** se le aplicó una homotecia con razón igual a $-\frac{4}{5}$. A la figura resultante **B** se le aplicó otra con razón igual a $\frac{10}{3}$ y se obtuvo la figura **C**. Explica por qué las figuras **A** y **C** son homotéticas. ¿Cuál es la razón de homotecia que permite obtener la figura **A** a partir de la **C**?

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-145a. Haz clic en "Problemas de homotecia" y observa el video. Si tienes dudas, anótalas y consulta las conclusiones que escribieron en estas lecciones. Comenta, con tus compañeros y con el profesor, lo que escribiste.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 27 en la bitácora de la página 166.

Eje: manejo de la información
Tema: proporcionalidad y funciones

Contenido

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

El plan de entrenamiento

Joel desea mejorar su velocidad al nadar; para ello, su entrenador diseña el siguiente plan de entrenamiento para un periodo de 12 días: el primer día, 13 minutos; el segundo día, 16 minutos; el tercer día, 21 minutos; el cuarto día, 28 minutos; y así sucesivamente.

El entrenador le pregunta si ha comprendido el plan. Joel está algo desconcertado porque no comprende bien cuál es la regularidad en el número de minutos que nadará cada día. ¿Existe alguna regularidad en su plan de entrenamiento?

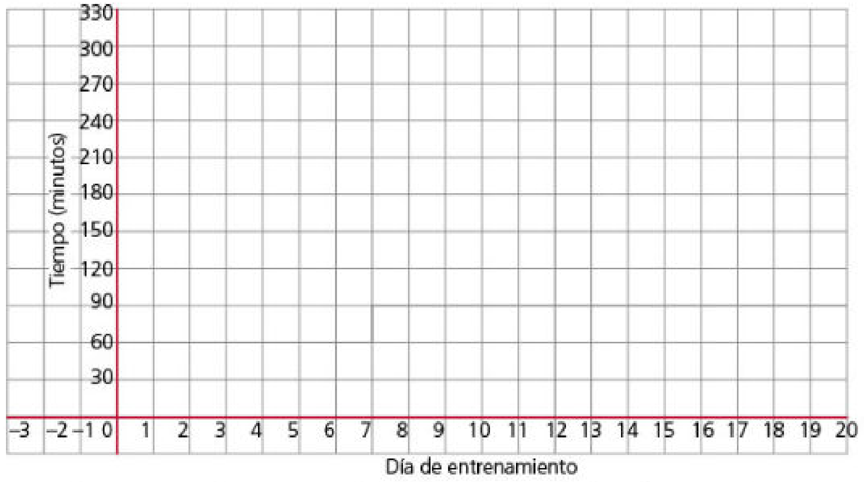
1. Reúnete con dos compañeros y respondan lo que se pide. Justifiquen sus respuestas en el cuaderno.

a) ¿Cuántos minutos nadará en los días quinto, sexto, séptimo y octavo de entrenamiento?

b) Completen la tabla.

Día de entrenamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tiempo (minutos)												

c) Representen en el plano cartesiano los datos de la tabla.



d) Unan los puntos que obtuvieron. Describan las características de la gráfica que se obtiene.

e) Grafiquen los puntos que corresponden a la expresión x^2. ¿Encuentran alguna relación entre esta gráfica y la que trazaron para el plan de entrenamiento?

f) Encuentren una expresión algebraica que modele el tiempo de entrenamiento en relación con el día de entrenamiento. Describan cómo verificarían que su expresión sea correcta.

g) Comparen las expresiones que obtuvieron con las de los otros equipos. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor, discutan lo siguiente: para la expresión x^2, ¿es posible graficar los valores de x que corresponden a números negativos? ¿Es posible graficar para valores negativos en el plan de entrenamiento?

Un paso adelante

2. Trabaja con un compañero. Analicen la situación y respondan lo que se indica.

El gerente de un cine estima que si cobra \$30.00 por localidad, podría atraer a 500 espectadores en un domingo y que cada descuento de \$1.00 aumentaría 20 espectadores más. Esta relación se muestra en la tabla.

Descuento(\$)	0	1	2	x
Precio(\$)	30	30 – 1	30 – 2	30 – x
Núm. de espectadores	500	500 + 20(1)	500 + 20(2)	500+ 20x
Ingresos	30(500)	(30 – 1)(500 + 20(1))	(30 – 2)(500 + 20(2))	(30 – x)(500+20x)

Los ingresos obtenidos se modelan con la función siguiente:

$$G = (30 - x)(500 + 20x) = -20x^2 + 100x + 15000$$

a) Calculen las ganancias para los descuentos desde \$1.00 hasta \$10.00

Descuento(\$)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ganancia(\$)	15000										

b) Grafiquen estos puntos. Coloquen el nombre que corresponde en cada eje. Indiquen qué escala les conviene utilizar en cada caso.

c) Observen la gráfica y respondan.

i. ¿Para qué valores de x asciende la ganancia? ____________

ii. ¿Para cuáles desciende? ____________

iii. ¿Para qué descuento se obtiene la ganancia máxima? ____________

iv. ¿Para qué descuento empiezan a disminuir las ganancias? ____________

d) Indiquen si cada una de las afirmaciones, referentes a las ganancias por las entradas del cine, es verdadera o falsa. Justifiquen las respuestas en su cuaderno.

i. Con descuento disminuyen las ganancias. ____________

ii. Con descuento siempre hay ganancias. ____________

iii. Con un descuento de \$31.00 hay una ganancia máxima. ____________

iv. Sin descuento se gana menos que con un descuento de \$2.00. ____________

e) Expliquen cómo se identifica en la gráfica la ganancia máxima.

f) Si se desea conocer la ganancia que se obtiene con un descuento de $20.00, ¿cómo lo calcularían?

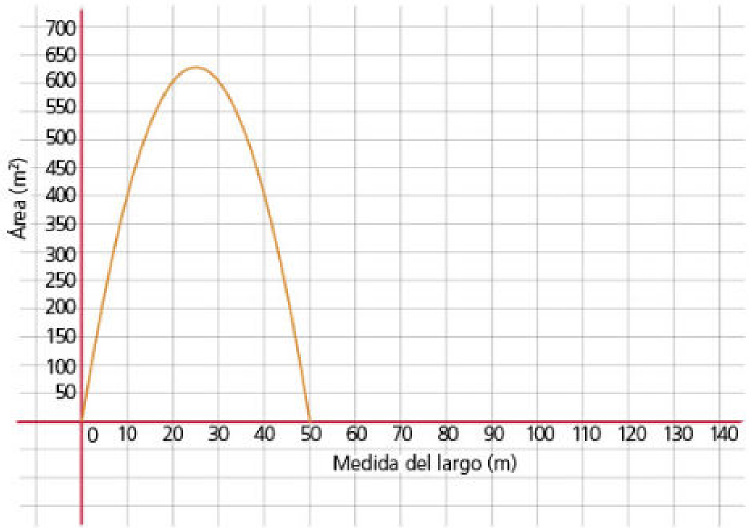
____

g) Usen la función $G = -20x^2 + 100x + 15\,000$ y determinen el descuento que se debe hacer para conseguir una ganancia de $15 200.00.

h) Comparen sus respuestas con las del grupo. Comenten cómo decidieron la escala para la gráfica. También expliquen cómo determinaron el descuento para tener una ganancia de $15 200.00. Si existe alguna duda, coméntenla con el profesor y pónganla a consideración del grupo.

Profundiza

3. Trabaja con un compañero. Analicen la situación y la gráfica. Efectúen lo que se indica.



a) Se trazará un rectángulo que tenga 100 m de perímetro. Para ello se requiere obtener el rectángulo que tenga la superficie más grande posible. Se hizo una gráfica para modelar esta situación.

i. Expliquen, en su cuaderno, cómo se elaboró la gráfica.

ii. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo con la superficie máxima? ____________

iii. ¿Cuánto mide la superficie máxima que se obtiene? ____________

iv. Si la medida del largo es igual a 10.5 m, calculen en la gráfica el valor del área. ____________

v. Calculen, en la gráfica, la medida del largo si el área es de 375 m². ____________

vi. Describan, en su cuaderno, todas las características de la situación, según la gráfica.

b) Escriban la igualdad que modela esta situación. Háganlo de manera que esté en la forma $A = ax^2 + bx + c$. ____________

c) En la igualdad que escribieron, el valor del área depende del valor de x. ¿Qué representa la x? ____________

d) Calculen, con la expresión algebraica, la superficie del rectángulo si el largo es igual a 10.5 m. ____________

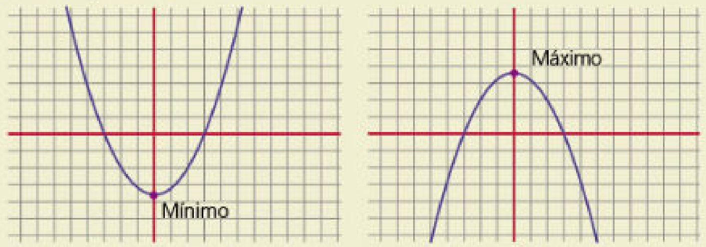
e) Usen la expresión algebraica para calcular el largo si el área del rectángulo es de 375 m². Indiquen, en su cuaderno, el procedimiento que siguieron.

f) Comparen sus respuestas y las expresiones que escribieron.

i. Discutan y complementen las características que escribió cada pareja sobre esta situación. Indiquen cuáles son las ventajas y las desventajas de conocer la gráfica que modela una situación.

ii. Lean la información. Comenten sus dudas y aclárenlas con la ayuda del profesor.

Al graficar en el plano cartesiano una expresión cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c$, se obtiene una curva que se llama **parábola**.



El **vértice** es el punto en que la gráfica alcanza su valor máximo o mínimo.

El valor de la expresión cuadrática se puede representar con la variable y, $y = ax^2 + bx + c$, o con el símbolo $f(x)$, que significa "**función de x**", es decir, que el valor que se obtiene depende del valor de x.

En la gráfica se indican los puntos (P,Q) de forma que, cuando x vale P, el valor de la función, o el de y, es Q.

4. Trabaja con un compañero. Analicen la situación y hagan lo que se indica. Respondan y justifiquen en su cuaderno.

a) Desde un edificio situado a 60 m de altura, se lanza un proyectil verticalmente hacia arriba a 20 m/s de una velocidad inicial. La altura del proyectil sobre el nivel está dada por la igualdad $y = -5x^2 + 20x + 60$; x es el número de segundos que han transcurrido desde el instante en que se lanzó la bola.

i. ¿Qué altura alcanza la bola para $x = 0$, $x = 2$ y $x = 5$?

ii. Tracen, en su cuaderno, la gráfica que representa esta situación.

iii. ¿Cuándo alcanza la bola su punto más alto?

iv. ¿A qué altura está ese punto?

v. ¿Cuánto tiempo tarda la bola en volver a tocar el suelo?

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-149a. Resuelve los reactivos 26 y 28 de tercero de secundaria, Matemáticas, sobre variación cuadrática. Lee las retroalimentaciones y coméntalas con un compañero.

Explora www.redir.mx/matret3-149b. Encontrarás información sobre la gráfica de funciones cuadráticas. Léela y contrástala con lo que aprendiste en la lección. Efectúa las actividades interactivas. Escribe tus dudas y coméntalas con dos compañeros.

Grafica la expresión $-\frac{1}{5}x^2 + 5x$. Localiza el vértice de la gráfica. ¿Para qué valores de x el valor de la expresión es 0?

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 28 en la bitácora de la página 167.

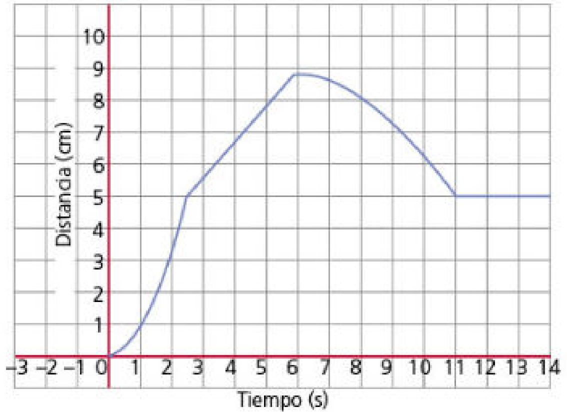
Eje: manejo de la información
Tema: proporcionalidad y funciones

Contenido

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

Los robots

La mamá de Rodrigo es científica. Se dedica a fabricar microrrobots —del tamaño de una pulga— destinados a funciones de vigilancia, microfabricación o medicina. A los robots fabricados se les hacen pruebas sobre cómo se comportan cuando son sometidos a diversos movimientos, por ejemplo, a velocidad constante, a aceleración constante o desaceleración constante. A uno de los robots se le hizo ir y volver sobre una línea recta. Su comportamiento está representado en la gráfica.



1. Reúnete con dos compañeros; analicen la gráfica y respondan lo que se les solicita.

a) Describe el recorrido del robot. ______

b) ¿En qué intervalo de tiempo tuvo velocidad constante? ______

c) ¿En qué intervalo de tiempo se desplazó con aceleración constante? ______

d) ¿En qué intervalo de tiempo presentó desaceleración constante? ______

e) ¿Cuál fue la distancia recorrida en el menor tiempo? ______

f) ¿Qué sucedió del segundo 11 al segundo 14? ______

g) ¿Qué distancia total recorrió el robot? ______

h) ¿Cuál fue la velocidad promedio en los primeros 11 segundos? ______

i) ¿Cuál fue la velocidad promedio total? ______

j) ¿Existe una relación lineal del segundo 11 al 15? ______ Justifica tu respuesta. ______

k) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y comenten qué indica la inclinación de la recta que representa la relación entre la distancia y el tiempo; por ejemplo, ¿qué significa que una recta tenga mayor inclinación que otra?

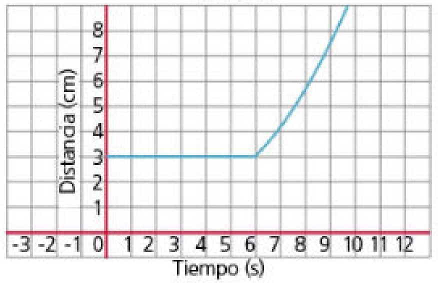
Un paso adelante

2. Reúnete con un compañero; analicen la información y respondan, en su cuaderno, lo que se solicita.

- Un cuerpo avanza en movimiento rectilíneo uniforme cuando se desplaza en línea recta y recorre distancias iguales a intervalos de tiempo iguales (su velocidad es constante).
- Un cuerpo tiene un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado cuando su aceleración es constante.
- Un cuerpo describe un movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado cuando su desaceleración es constante.

a) El movimiento de otro robot está representado en la gráfica.

Gráfica 1

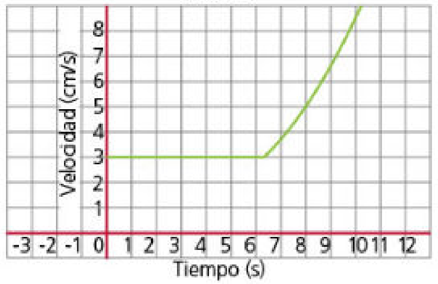


i. Describan, en su cuaderno, el recorrido del robot e indiquen el tipo de movimiento que presentó.

ii. Indiquen si puede determinarse la distancia total que recorrió el robot.

b) Se programó al mismo robot para que su comportamiento fuera el descrito en la siguiente gráfica.

Gráfica 2



i. Indiquen el tipo de movimiento que presentó este robot.

ii. ¿Qué información falta para describir completamente el recorrido del robot?

c) Describan, en su cuaderno, el comportamiento de un robot que tenga los tres tipos de movimiento que se presentaron.

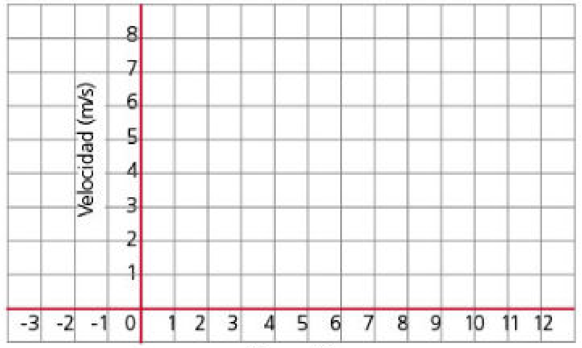
d) Tracen la gráfica de distancia contra tiempo y de velocidad contra tiempo que representa el comportamiento que describieron.

e) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Elaboren la gráfica velocidad contra tiempo que corresponde a la gráfica 1. Elaboren la gráfica distancia contra tiempo que corresponde a la gráfica 2 si la distancia inicial del robot es igual a cero.

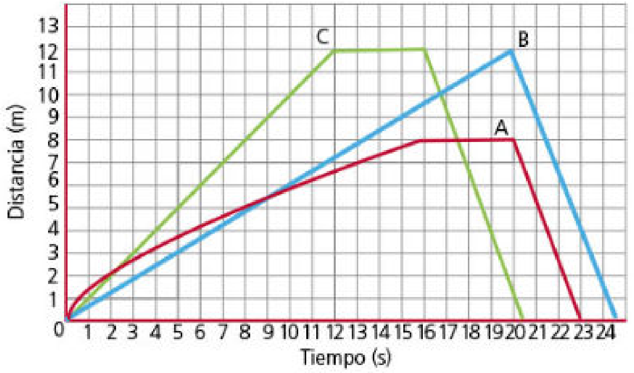
Profundiza

3. Reúnete con un compañero para analizar cada planteamiento. Efectúen lo que se indica.

a) Una partícula en reposo es sometida a aceleración constante durante 4 s. Continúa sin aceleración durante 3 s, y luego frena de manera constante hasta parar. Representen dicho movimiento en la gráfica.



b) La gráfica representa el comportamiento simultáneo de tres móviles:



i. Señalen qué afirmaciones son correctas. Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

- El más rápido fue el móvil C.
- El único que no iba a velocidad constante de ida fue el móvil A.
- Quien llevaba mayor velocidad al inicio fue el móvil A.
- El móvil C siempre mantuvo una aceleración constante de ida y de regreso.
- La aceleración del móvil B fue nula.
- El móvil B rebasó al móvil A en el segundo 11.
- En el segundo 12, el móvil C se detuvo.
- Quien recorrió mayor distancia fue el móvil A.
- El móvil B y el móvil C recorrieron la misma distancia.
- Los tres móviles regresaron con la misma velocidad al punto de partida.

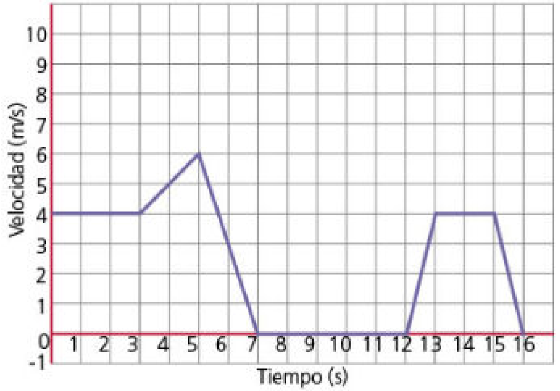
ii. ¿Cuál fue la velocidad promedio del móvil B en la ida? ____________

iii. ¿Y del móvil C? ____________

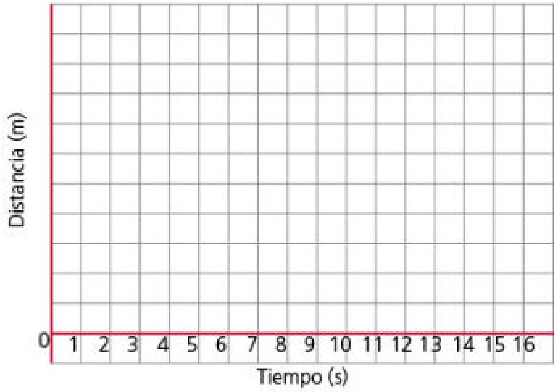
c) Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen la gráfica que trazaron en el inciso a) y sus respuestas en el inciso b). Discutan lo siguiente: a partir de la gráfica de velocidad contra tiempo, ¿es posible trazar la de distancia contra tiempo? Y, a partir de la gráfica de distancia contra tiempo, ¿es posible trazar la otra?

4. Reúnete con un compañero. Hagan lo que se indica en cada caso.

a) La gráfica muestra la velocidad de un móvil respecto al tiempo. Describan, en su cuaderno, lo que ocurrió.



b) Representen la situación anterior respecto a la distancia y el tiempo.

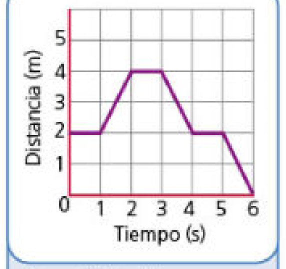


c) Efectúen una puesta en común de sus descripciones, así como la gráfica que describe el comportamiento de las variables distancia y tiempo. Discutan qué sucede con la aceleración, la distancia y el tiempo cuando un móvil mantiene una velocidad constante y cuando no es constante. Escriban una conclusión al respecto.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-153a. Resuelve el reactivo 31 de tercero de secundaria, Matemáticas. Lee las retroalimentaciones y coméntalas con un compañero.

Explora www.redir.mx/matret3-153b. Encontrarás información sobre gráficas de movimiento. Describe, en el cuaderno, tus dudas y dificultades.



Un móvil describe una trayectoria rectilínea como se muestra en la gráfica. ¿Cuánto tardó en todo el recorrido? ¿Cuánto fue la distancia recorrida? ¿Cuál fue su velocidad máxima?

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 29 en la bitácora de la página 167.

Eje: manejo de la información
Tema: proporcionalidad y funciones

Contenido

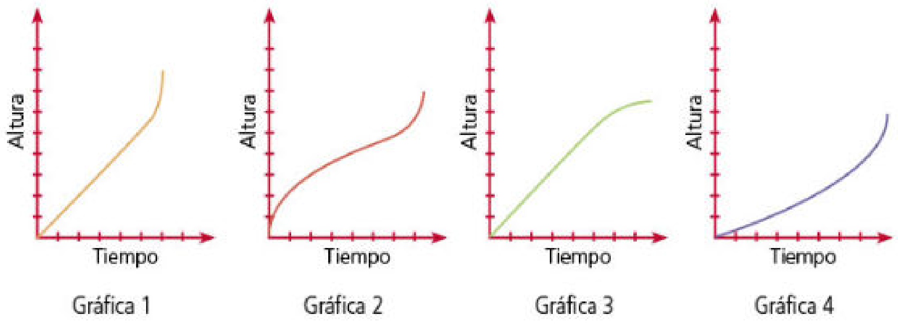
Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

Los tinacos

Una empresa de químicos tiene tinacos de almacenamiento. Para evitar que se derramen ciertos líquidos peligrosos, en cada tinaco se instalaron sensores de llenado. El sensor registra la altura que alcanza el líquido conforme transcurre el tiempo de llenado para que, al llegar a su máximo nivel, se cierre la llave de alimentación. Las llaves de alimentación siempre vierten la misma cantidad de líquido por segundo.

1. Analiza el planteamiento y efectúa lo que se indica.

a) Selecciona la gráfica que representa la altura que va alcanzando el nivel de líquido respecto al tiempo de llenado.



b) Argumenta la respuesta en tu cuaderno.

2. Trabaja con un compañero. Comparen sus respuestas sobre el tipo de gráfica. Respondan en su cuaderno.

a) Describan en qué coincidieron y cuáles fueron sus diferencias.

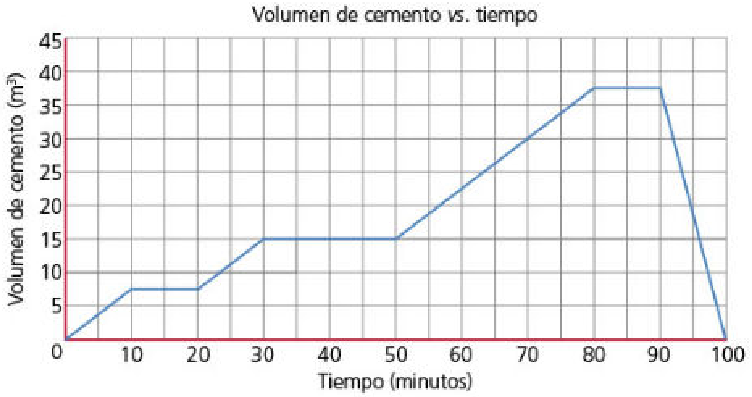
b) ¿La relación entre la altura del nivel del líquido y el tiempo es lineal? Justifiquen su respuesta.

c) Dibujen cómo serían las formas de los recipientes representados por las gráficas restantes.

Un paso adelante

3. Observa la gráfica, analiza y contesta lo que se solicita. Justifica las respuestas en tu cuaderno.

Una empresa constructora está llenando moldes cúbicos para calibrar una máquina revolvedora. La máquina deja caer el cemento a través de una manguera, en un flujo constante y continuo, hasta llenar un molde cúbico por completo. El flujo de cemento se detiene cada determinado tiempo para que la revolvedora no se caliente. Al final, se vacía el cubo a velocidad constante hasta que casi no queda cemento dentro de él.



a) ¿En qué intervalo o intervalos de tiempo se descarga cemento en el contenedor? ________

b) ¿En qué intervalo de tiempo fue el primer descanso? ________

c) ¿Cuánto duró el segundo descanso de la máquina? ________

d) ¿En qué intervalo de tiempo fue el tercer descanso? ________

e) ¿En qué minuto se llena completamente el molde? ________

f) ¿A partir de qué minuto se inicia el vaciado del molde? ________

g) ¿En qué minuto se vacía completamente el molde? ________

h) Si se llenara el molde sin dejar descansar a la máquina, ¿en cuánto tiempo estaría lleno? ________

i) ¿El flujo de llenado es el mismo para los tres intervalos? ________

j) ¿Cuál es el flujo de llenado en cada intervalo? ________

k) ¿Cuál es el flujo con que se vacía el cubo? ________

4. Efectúa lo que se indica. Responde en tu cuaderno.

a) Se tienen varios recipientes con la forma de los cuerpos geométricos que se indican. Cada uno se llenará en una toma de agua cuyo flujo es constante y continuo. Traza la gráfica que representa cómo cambia la altura del agua en el recipiente en función del tiempo de llenado.

i. Cilindro ii. Pirámide iii. Prisma rectangular iv. Cono

b) Explica cómo determinaste la forma de cada gráfica.

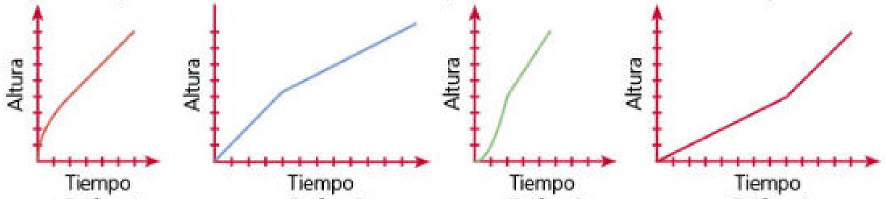
5. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Indiquen si el tinaco de la actividad 1 tiene algún parecido con estos cuerpos.

Profundiza

6. Reúnete con un compañero, analicen la figura y las gráficas, y respondan lo solicitado:

Un balneario tiene diferentes modelos de albercas, uno de éstos es como el que se muestra en la figura.

a) La alberca se llena con varias tomas, cuyo flujo de agua es constante y continuo. ¿Cuál de las gráficas representa el aumento en el nivel del agua de la alberca en función del tiempo?



Gráfica 1 Gráfica 2 Gráfica 3 Gráfica 4

b) Describan las características que observaron para seleccionar la gráfica. ______

______

c) Cuando la alberca está llena, ¿qué cuerpos geométricos se forman en su interior? Descríbanlos en su cuaderno.

d) ¿En cuál de ellos sube más rápido el nivel del agua? Respondan y justifiquen en su cuaderno.

e) Dibujen, en su cuaderno, una gráfica para cada cuerpo, la cual represente el aumento del nivel de agua en función del tiempo.

7. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se solicita.

a) ¿Cómo debe ser un recipiente para que la gráfica de llenado que le corresponde sea una recta.

______

b) ¿Cómo debe ser un recipiente para que la gráfica de llenado que le corresponde sea una curva.

______

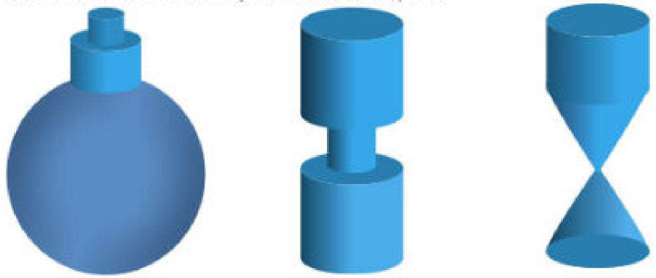
c) Un vaso cilíndrico está lleno a la mitad, se termina de llenar con un flujo constante. Tracen la gráfica que corresponde a este llenado.

d) Un cono está lleno a la tercera parte de su altura, se termina de llenar con un flujo constante. Tracen la gráfica que corresponde a este llenado.

8. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Indiquen las dudas y dificultades que tuvieron al trazar las gráficas. Aclárenlas entre todos y con la ayuda del profesor.

9. Trabaja con dos o tres compañeros. Analicen los planteamientos y efectúen lo que se solicita.

a) Elaboren una gráfica, para cada recipiente, que corresponda a la altura del nivel de agua en función del tiempo, si son llenados con un flujo constante de líquido.



Recipiente 1 Recipiente 2 Recipiente 3

b) Comenten las características de las relaciones que existen entre las variables "Altura del nivel del agua" y el "tiempo de llenado" en cada caso.

Recipiente 1 ______

Recipiente 2 ______

Recipiente 3 ______

c) Diseñen un recipiente que corresponda a cada gráfica; éstas representan el cambio en la altura de un líquido cuando el recipiente se llena con un flujo constante.

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Indiquen si el tinaco de la actividad 1 tiene algún parecido con estas figuras.

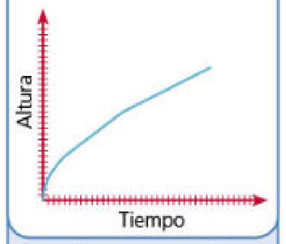
TIC

Explora www.redir.mx/matret3-157a. Resuelve el reactivo 32 de tercero de secundaria, Matemáticas. Lee las retroalimentaciones y coméntalas con un compañero.

Entra a www.redir.mx/matret3-157b. Haz clic "Llenado de recipientes". Encontrarás un video sobre gráficas de llenado de recipientes. Obsérvalo y describe, en el cuaderno, las dudas y dificultades que afrontaste.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 30 en la bitácora de la página 167.

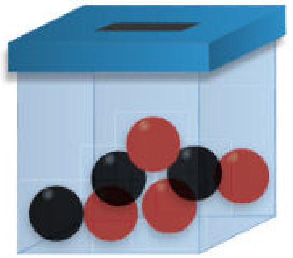


La gráfica representa el cambio en el nivel del agua en un recipiente al ser llenado. Diseña un recipiente que le corresponda.

Eje: manejo de la información
Tema: nociones de probabilidad

Contenido

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)



Probabilidad de eventos independientes

1. Trabaja con un compañero. Respondan en el cuaderno lo que se pide.

a) En una urna hay cuatro bolas rojas y tres negras. Se saca una bola, se registra el color y se regresa a la urna, posteriormente se extrae otra y se registra el color.

i. Sea el evento **A**: "la primera bola es roja", ¿cuál es el valor de P(**A**)?

ii. Sea el evento **B**: "la segunda bola es roja", ¿cuál es el valor de P(**B**)?

iii. Si se sabe que la primera bola que se extrajo fue roja, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento **B**?

iv. Comparen las medidas de probabilidad que obtuvieron en los subincisos ii. y iii. Escriban una conclusión acerca de si tiene influencia la primera extracción sobre la segunda. Expliquen a detalle.

b) ¿Cuál es el valor de P(**A** y **B**)?

c) ¿Cómo son entre sí los eventos **A** y **B**, mutuamente excluyentes, complementarios o independientes?

2. Analicen, discutan y justifiquen la siguiente situación en su cuaderno.

En la tabla se muestran los resultados de un estudio de 2008 acerca del posicionamiento de tres carreras profesionales entre la población y los factores que influyen en la toma de decisiones.

¿Cuál es la carrera profesional con más prestigio?				
Carrera	**Total (%)**	**Por rango de edad (%)**		
		18-29 (30%)	**30-49 (44%)**	**50 o más (26%)**
Medicina	42	40	47	37
Derecho	16	14	18	16
Administración	5	8	4	3

Tomado de CIDAC, *Encuesta CIDAC sobre carreras profesionales*, agosto de 2008, disponible en www.cidac.org/esp/uploads/1/InformeEncuestaCIDAC-CarrerasProfesionalesDF.pdf (Consulta: 2 de junio de 2013).

a) Se selecciona al azar a una de las personas que respondió la encuesta. Sea el evento **A**: "la edad de la persona está entre 18 y 29 años", y el evento **B**: "la persona considera que Derecho es la carrera con más prestigio". Calculen P(**A**) y P(**B**).

b) Se selecciona al azar a una de las personas que respondieron la encuesta. Al verla llegar se sabe que tiene entre 18 y 29 años de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que haya considerado que Derecho es la carrera con más prestigio? ¿Es la misma que obtuvieron en el inciso anterior?

c) Calculen el valor de P(**A** y **B**). Expliquen su procedimiento.

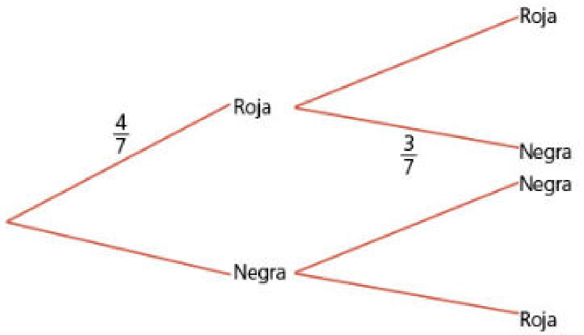
d) ¿Los eventos **A** y **B** son independientes? Justifiquen su respuesta.

e) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten cómo calcularon las probabilidades y cómo determinaron si los eventos son independientes o no.

Un paso adelante

3. Trabaja con dos o tres compañeros. Analicen la situación. Justifiquen sus respuestas en el cuaderno.

a) El diagrama de árbol muestra los posibles resultados del experimento aleatorio de la actividad 1 y sus probabilidades. Completen lo que falta. Escriban las medidas de probabilidad con una fracción.



i. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera extracción se obtenga una bola negra? ______

ii. ¿Cómo se representa esta probabilidad en el diagrama de árbol? ______

______

______

iii. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado del experimento sea (negra, roja)? ______

iv. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea (roja, roja)? ______

v. ¿Cuál es la probabilidad de que en la segunda extracción se obtenga una bola roja? ______

vi. Expliquen cómo se representa esta probabilidad en el diagrama de árbol. ______

______

______

b) Si se sabe que en la primera extracción la bola fue negra, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja? ______

c) ¿Cómo se representa esta probabilidad en el diagrama de árbol? ______

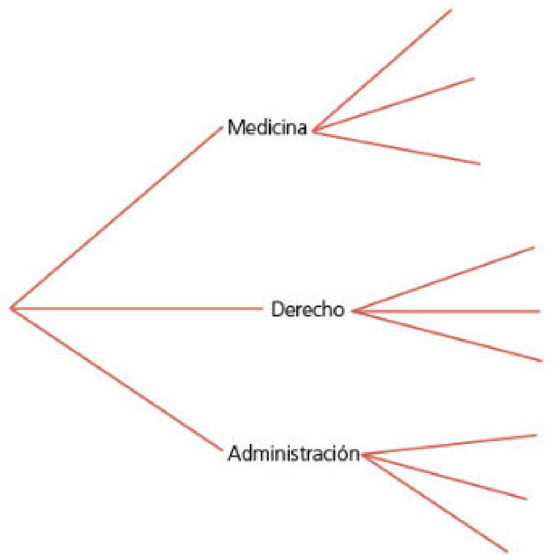
______

______

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Obtengan una conclusión sobre los procedimientos que siguieron para calcular las probabilidades que se piden. Expliquen si los eventos "la primera bola es negra" y "la segunda bola es roja" son independientes.

4. **Trabaja con dos o tres compañeros. Analicen la situación. Justifiquen sus respuestas en el cuaderno.**

a) Consideren la encuesta de la actividad 2. Completen el diagrama de árbol para indicar las probabilidades de los resultados posibles.



b) Si se selecciona al azar a una de las personas encuestadas, ¿cuál es la probabilidad de que considere que la carrera con más prestigio es Medicina? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 35 años mencione que Medicina es la carrera con más prestigio? ______

d) ¿Son iguales las dos probabilidades? Escriban su conclusión. ______

e) Si se selecciona al azar a una persona encuestada, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 50 o más años? ______

f) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 72 años haya considerado que Medicina es la carrera más prestigiosa? ______

g) ¿Son iguales las dos probabilidades? Escriban su conclusión. ______

h) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten las semejanzas y las diferencias entre la situación de la urna y la de los datos de la encuesta desde el punto de vista de la probabilidad de los eventos.

Profundiza

5. **Lean la información en grupo. Comenten cómo la han utilizado en las lecciones de probabilidad que han trabajado durante el año escolar.**

Para dos eventos independientes **A** y **B**, la probabilidad de que los dos ocurran se calcula al multiplicar la probabilidad de que suceda uno con la probabilidad de que ocurra el otro, es decir, P(**A** y **B**) = P(**A**)P(**B**). Cuando se representan los resultados de un experimento aleatorio en un diagrama de árbol, la probabilidad de un resultado posible es igual al producto de la probabilidad de cada rama que forma el camino de dicho resultado. Esto se conoce como **Regla del producto**.

6. **Trabaja con un compañero. Respondan y justifiquen lo que se pide.**

a) En una empresa trabajan 12 hombres y 18 mujeres. De ellos, ocho hombres y 12 mujeres prefieren participar en una caja de ahorro anual que depositar en el banco.

i. Si se solicita al azar una persona de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y que prefiera depositar en el banco en vez de la caja de ahorro?

ii. Expliquen si los eventos "ser mujer" y "preferir depositar en el banco" son independientes. ______

b) La probabilidad de que una familia salga de excursión un fin de semana es de 0.4. La probabilidad de que llueva ese fin de semana es de 0.2.

i. Calculen la probabilidad de que la familia salga de excursión dos fines de semana consecutivos. ______

ii. Calculen la probabilidad de que la familia salga de excursión y de que no llueva. ______

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten cómo calcularon las probabilidades. Si tienen dudas, exténenlas con la finalidad de aclararlas.

TIC

Entra a www.redir.mx/matret3-161a. Observa el video sobre eventos independientes. Escribe tus conclusiones en el cuaderno.

Ingresa a www.redir.mx/matret3-161b. Efectúa las actividades sobre eventos independientes. Comenta tus dudas y dificultades con dos o tres compañeros y compártanlas con el grupo.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 31 en la bitácora de la página 167.

Eje: manejo de la información
Tema: nociones de probabilidad

Contenido

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

Distintas probabilidades

1. Analicen las situaciones, discutan y justifiquen lo que se pide.

a) Consideren el experimento aleatorio de lanzar tres monedas al aire.

i. ¿Cuál es la probabilidad de que en los tres lanzamientos caigan águilas? ______

ii. Escriban la operación o las operaciones para calcularla. ______

iii. ¿Se trata de un evento compuesto o de un evento simple? ______

iv. ¿Cuál es la probabilidad de atinar a cinco volados seguidos? ______

v. Escriban la operación o las operaciones con que la calcularon. ______

vi. Elaboren el diagrama de árbol con que se modela el experimento aleatorio. En cada rama indiquen la probabilidad correspondiente.

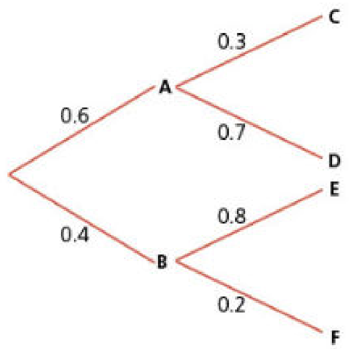
b) Consideren el experimento aleatorio de lanzar simultáneamente una moneda y un dado.

i. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga sol y el número cuatro? ______

ii. ¿Son independientes los eventos "en la moneda cae águila" y "en el dado cae cuatro"? ______

iii. ¿Se puede aplicar la regla del producto para calcular la medida de probabilidad? Expliquen. ______

c) El diagrama de árbol representa los resultados de un experimento aleatorio.



i. Expliquen por qué la suma de las probabilidades de las ramas que salen de un mismo nodo vale uno. ______

ii. Calculen P(**A** y **C**). Expliquen su procedimiento. ______

iii. Escriban una situación que sea modelada por el diagrama de árbol. ______

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten sus procedimientos de resolución. Indiquen si los eventos **A** y **C** son complementarios, mutuamente excluyentes o independientes.

Un paso adelante

2. Efectúa lo que se indica. Responde en el cuaderno.

a) Miriam trabaja como vendedora en el Departamento de Óptica de una tienda departamental. Ella estima que la probabilidad de que una persona adquiera unos lentes después de asistir a su departamento es de $P = 0.28$, por lo que selecciona a cinco personas de un listado de clientes, les llama y hace una cita para ofrecerles los productos. ¿Cuál es la probabilidad de que los cinco clientes compren? Selecciona el procedimiento que da la respuesta.

i. La decisión de cada cliente se modela como un evento independiente de los demás, por lo tanto, se aplica la regla de la multiplicación.

ii. La decisión de cada cliente se modela como un evento mutuamente excluyente de los demás, entonces se aplica la regla de la suma.

iii. La decisión de cada cliente se modela como un evento dependiente. Para que se conozca la probabilidad de que los cinco compren los lentes, es necesario conocer la probabilidad de un evento asumiendo que ya ocurrieron los otros.

b) Tres alumnos se están postulando como jefes de grupo en una escuela secundaria. Las probabilidades de ganar de los candidatos son las siguientes.

Alumno A: 0.25 Alumno B: 0.4 Alumno C: 0.35

Si gana el alumno A, la probabilidad de que se forme un club de ciencias es de 0.8; si gana el B, la probabilidad es de 0.4; si gana el C, la probabilidad es de 0.7. Determinen la probabilidad de que…

i. gane el alumno A y se forme el club de ciencias,

ii. gane el alumno B y no se forme el club de ciencias,

iii. no gane el alumno C y se forme el club de ciencias.

c) En una encuesta llevada a cabo por un agente de ventas de una concesionaria automotriz se obtuvo que las probabilidades de que los clientes pidan un auto de color verde, blanco, rojo o azul, son 0.4, 0.25, 0.41 y 0.53, respectivamente. En caso de hacerse la compra de un auto…

verde, la probabilidad de existencia es de 0.2;

blanco, la probabilidad de que haya es de 0.9;

rojo, la probabilidad de existencia es de 0.86;

azul, la probabilidad de que haya es de 0.7.

i. ¿Cuál es el evento que tiene mayor probabilidad de ocurrir? Expliquen.

ii. ¿La medida de probabilidad de que un cliente pida un auto rojo y que sí haya es menor que la medida de que pida un auto verde y haya en existencia?

d) Tres amigos juegan a tirar dardos a una diana. La probabilidad de que cada uno acierte en el centro es de $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{3}$. Cada jugador lanza una vez.

i. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún dardo quede clavado en el centro de la diana?

ii. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres acierten al centro?

e) En un juego de mesa en el que se avanza una ficha como resultado de tirar un dado es conveniente obtener un seis, ya que se avanza doble. Sin embargo, si tres veces seguidas se obtiene un seis, se castiga al jugador con volver a la casilla de inicio.

i. ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres veces seguidas un seis?

ii. ¿Cuál es la probabilidad de no lograrlo?

iii. En tres tiradas, ¿cuál es la probabilidad de que sólo en dos de ellas se obtenga un seis?

iv. ¿Cuál es la probabilidad de que sólo una vez se obtenga el seis?

f) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten sus estrategias de solución. Escriban una conclusión sobre las ventajas y desventajas de usar la regla del producto para calcular la probabilidad de un evento.

Profundiza

3. Efectúa lo que se indica. Responde y justifica en el cuaderno.

a) Un experimento aleatorio involucra un dado y dos urnas. Primero se lanza el dado, si cae 1 o 2 se extrae una bola de la urna que contiene dos bolas azules y dos blancas; si se obtiene un número mayor que 2, se saca una bola de la urna con dos bolas azules y cuatro blancas.

i. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola azul?

ii. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una blanca?

iii. Explica si los eventos "extraer una bola blanca" y "extraer una bola azul" son mutuamente excluyentes, complementarios o independientes.

iv. Explica si los eventos "obtener 3 en el dado" y "extraer una bola blanca" son mutuamente excluyentes, complementarios o independientes.

b) Determina la veracidad de los enunciados. En caso de que comuniquen información errónea, propongan uno que sea correcto.

Enunciado	Veracidad
Para calcular la probabilidad de dos eventos independientes se usa la regla del producto.	
Para determinar la probabilidad de dos o más eventos independientes, se obtiene el cociente de las probabilidades de cada evento.	
Para dos eventos **A** y **B** que no son independientes, P(**A** y **B**) = P(**A**)P(**B**).	
En la regla de la multiplicación el producto obtenido debe ser menor o igual que la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos eventos considerados.	
La regla de la multiplicación favorece el estudio y la comprensión de comportamientos o de situaciones modelados matemáticamente.	

c) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Discutan sus propuestas a los enunciados identificados y verifíquenlos. Si hay dificultades, extérnenlas al grupo con la finalidad de darles solución.

TIC

Entra a www.redir.mx/matret3-165a. Efectúa las actividades sobre la regla del producto. Escribe tus conclusiones en el cuaderno.

Ingresa a www.redir.mx/matret3-165b. Calcula las probabilidades requeridas. Escribe en el cuaderno ejemplos de eventos independientes y eventos que no sean independientes.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 32 en la bitácora de la página 167.

Si dos eventos **A** y **B** son mutuamente excluyentes, ¿se puede saber si son independientes? Explica tu respuesta y escribe un ejemplo.

Lección 22

a) Escribe la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado. ____________

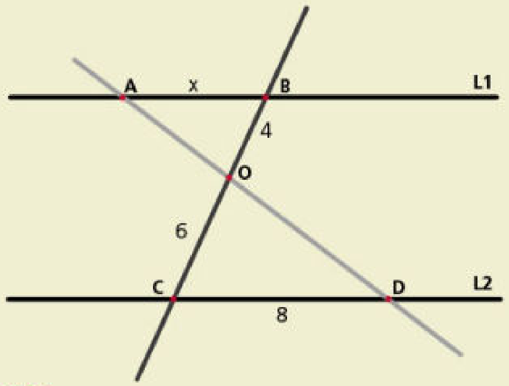
b) Se coloca una fotografía de 20 cm de largo por 15 cm de ancho en un marco de 336 cm^2 de área. ¿Cuál es el ancho del margen entre la fotografía y la orilla del marco? ____________

Lección 23

a) A cierta hora de la tarde, un edificio proyecta una sombra de 20 m. Al mismo tiempo, una persona de 1.5 m proyecta una sombra de 2 m. ¿Cuál es la altura del edificio? ____________

Lecciones 24 y 25

a) Calcula el valor de *x* en la figura. Considera que las rectas **L1** y **L2** son paralelas.



Lecciones 26 y 27

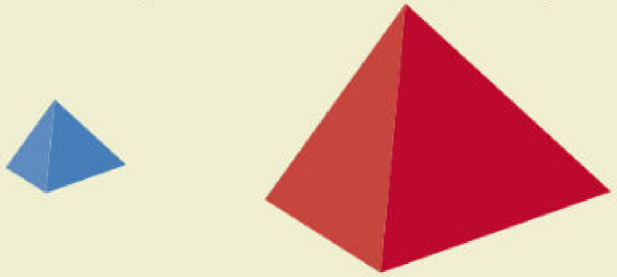
a) ¿Qué sucede si la razón de homotecia entre dos figuras es igual a 1? ¿Y si la razón es –1?

____.

b) Si una figura **B** se obtuvo mediante una homotecia a partir de la figura **A** con una razón $\frac{1}{2}$, ¿qué puedes decir del tamaño de **B** respecto al de **A**? ____________.

c) ¿Las figuras homotéticas son semejantes? ____________.

d) Señala el centro de homotecia y la razón de homotecia entre las siguientes figuras.



Lección 28

Un avión despega en una pista de 4.2 km de longitud. La tabla muestra cómo aumenta su velocidad.

Tiempo (s)	0	10	20	30	40	50	60
Distancia (m)	0	200	600	1 200	2 000	3 000	4 200
Velocidad (m/s)	10	20	30	40	50	60	70

a) Haz en tu cuaderno una gráfica que relacione la distancia contra el tiempo.

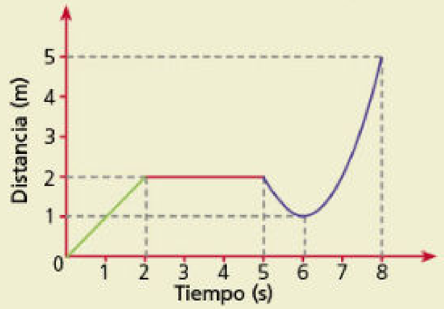
b) Haz en tu cuaderno una gráfica que relacione la velocidad contra el tiempo.

c) Compara las dos gráficas. La primera gráfica corresponde a una ecuación ____________; la segunda, a una ecuación ____________

d) Verifica que los datos del inciso a) cumplen con la relación $d = t^2 + 10t$.

Lecciones 29 y 30

El movimiento en línea recta de un insecto está descrito en la siguiente gráfica.



a) Describe el movimiento del insecto. ____________

____

Lecciones 31 y 32

a) Explica cuándo dos eventos son independientes. ____________

____

b) Se tiran dos dados de seis caras al mismo tiempo. Determina la probabilidad de que en un dado salga 4 y en el otro un número mayor a 3. ____________

c) En un examen de cuatro preguntas, cada pregunta tiene cinco opciones y sólo una es la correcta. Si se responden al azar, ¿cuál es la probabilidad de acertar todas? ____________

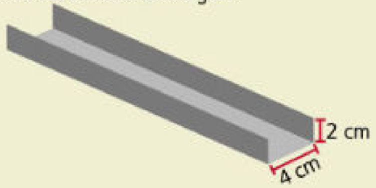
Los puentes de papel

En esta sección efectuarás un experimento para probar algunos principios utilizados en la construcción de puentes; además, los representarás en una gráfica.

1. Reúnete con un compañero y lleven a cabo la actividad.

a) Preparen el siguiente material: varias tiras de cartulina de 30 cm × 8 cm, dos libros del mismo grosor, un vaso de papel o plástico ligero y aproximadamente 50 monedas pequeñas de la misma denominación.

b) Construyan un "puente de papel" haciendo un pliegue de 2 cm sobre el borde longitudinal de las tiras de cartulina, tal como se muestra en la imagen.



c) Suspendan el puente entre los dos libros y coloquen el vaso de papel a la mitad del puente.

d) Introduzcan una moneda en el vaso. Repitan la acción hasta que el puente se colapse.

e) Registren el número de monedas colocadas en el vaso. Este número representará el peso de colapso del puente.

f) Unan dos tiras de cartón para hacer un puente de doble grosor y determinen el peso de colapso de este puente.

g) Repitan el experimento para determinar el peso de colapso de puentes hechos con tres, cuatro y cinco tiras de cartulina, respectivamente.

2. Elaboren en su cuaderno una tabla y una gráfica que relacionen el número de tiras de cartulina con el peso de colapso.

a) Describan el patrón de cambio en los datos.

b) ¿Se trata de una curva o una recta?

c) Encuentren la expresión algebraica que represente la situación.

d) Usen la expresión algebraica y contesten cuál es el peso de colapso de los puentes de seis y siete capas de grosor, respectivamente.

3. En un ejercicio similar se determinó la relación entre el número de monedas (p) y el número de capas (x) como $p = 2x^2 + 1$. Respondan lo que se pide.

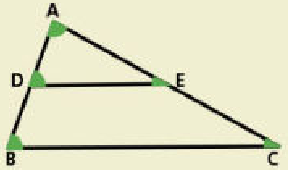
a) ¿Cuántas monedas se necesitan para que se colapse un puente de cuatro capas?

b) Si el puente se colapsó con nueve monedas, ¿cuántas capas tenía?

c) ¿Cuántas capas se pueden colocar si se tienen 50 monedas?

Más sobre el teorema de Tales

1. Reúnete con dos compañeros, observen la figura. Las rectas que pasan por $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ son paralelas. Discutan y respondan las preguntas. Expliquen las respuestas en su cuaderno.



a) Los triángulos ADE y ABC son semejantes. Justifíquenlo.

b) Tracen una recta que pase por E y que sea paralela a $\overline{AB}$; al punto donde cruce con $\overline{BC}$ llámenlo E'.

c) Justifiquen por qué la medida de $\overline{EE'}$ es la misma que la de $\overline{BD}$.

d) Los triángulos ADE, EE'C y ABC son semejantes. Justifíquenlo.

e) Completen la igualdad de cocientes entre las medidas proporcionales.

$$\frac{\overline{EE'}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\overline{AC}} \qquad \frac{\boxed{}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\boxed{}}$$

f) Usen estas igualdades para justificar que…

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AD}}$$

Expliquen su procedimiento.

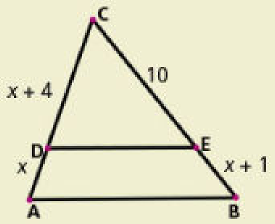
g) Con base en lo anterior, justifiquen la siguiente igualdad.

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$$

Expliquen su procedimiento.

2. Lean la información y respondan lo que se pide.

Propiedad del teorema de Tales
Si dos triángulos están en posición de Tales, entonces sus ángulos son respectivamente iguales y las medidas de sus lados son proporcionales.



a) ¿Qué significado asignan a la siguiente expresión: "Dos triángulos en posición de Tales"? Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

b) Observen la figura. Encuentren el valor de x.

c) ¿Cuáles son las dos razones de semejanza entre los triángulos?

Lee con atención los planteamientos, elige la respuesta correcta y márcala en la sección de respuestas.

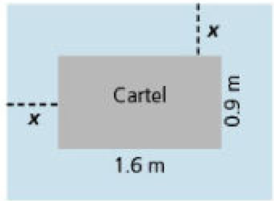
1. Valentina enmarcará, entre dos piezas rectangulares de acrílico transparente, un cartel de 0.9 m × 1.6 m. Quiere que cada pieza de acrílico tenga el doble de área que el cartel y que el ancho de las orillas que sobresalgan sea uniforme. Si x representa el ancho de cada orilla, ¿qué ecuación modela la situación y cuál es su solución?

a) $(1.6 + 2x)(0.9 + 2x) = 2.88$; $x = 0.24$ m

b) $(1.6 + 0.9)4x^2 = 2.88$; $x = 0.53$ m

c) $(1.6)(0.9) = 2.88x^2$; $x = 0.71$ m

d) $(1.6x)(0.9x)^2 = 2.88$; $x = 1$ m



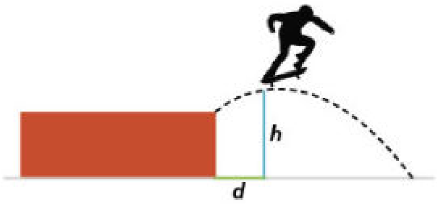
2. Un joven saltó en patineta de una plataforma. La altura de la patineta hasta el suelo (h) y su distancia horizontal a la plataforma (d) están relacionadas mediante la ecuación $h = -\frac{d^2}{3} + \frac{2d}{3} + 1$. ¿Cuál será la distancia (d) cuando la patineta toque el piso?

a) 1 m

b) 2 m

c) 3 m

d) 6 m



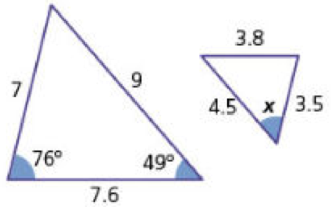
3. ¿Cuánto mide el ángulo x en la figura de la derecha?

a) 55°

b) 49°

c) 27.5°

d) 24.5°



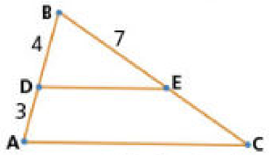
4. En la figura de la derecha, los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{AC}$ son paralelos. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{BC}$ (redondeado a centésimos)?

a) 16.33

b) 12.25

c) 9. 33

d) 5.25



5. Dos triángulos, ABC y A'B'C', son semejantes, pero los lados de ΔABC miden la mitad que los de ΔA'B'C'. Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 3$, ¿cuánto vale la razón $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}}$?

a) 6

b) 3

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3}$

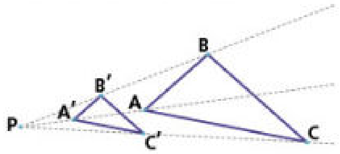
6. En la figura, los segmentos $\overline{PB'}$ y $\overline{PB}$ miden 1.96 cm y 4.56 cm, respectivamente. ¿Cuál es la razón de homotecia del ΔA'B'C' respecto al ABC?

a) 0.43 cm

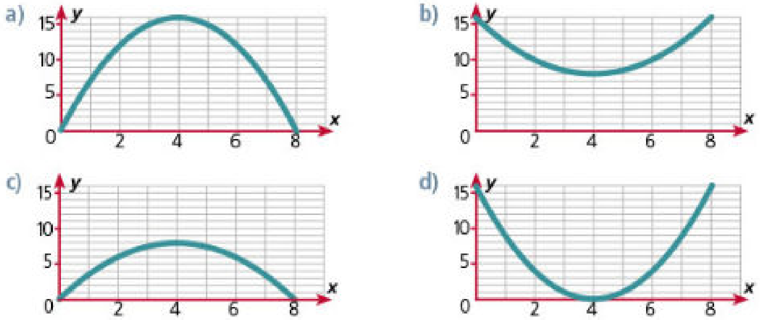
b) 2. 33 cm

c) 6.52 cm

d) 8.94 cm



7. Un rectángulo tiene 16 cm de perímetro fijo. ¿Qué gráfica muestra la relación entre la medida de la base (x) y el área del rectángulo (y)?



8. A un cuadrado de 10 cm de lado se le recorta un cuadrado más pequeño (de lado x) en cada esquina. ¿Qué ecuación relaciona el lado del cuadrado recortado (x) y el área de la figura obtenida (y)?

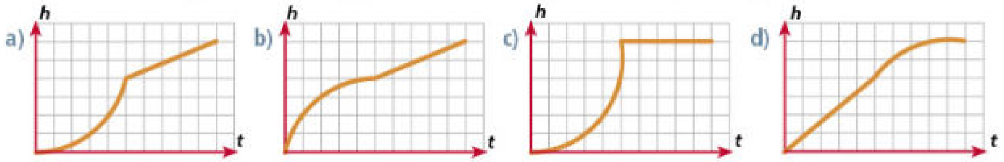
a) $y = 40 - 4x^2$

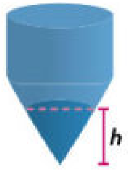
b) $y = 100 - 4x^2$

c) $y = 100 + x^2$

d) $y = 40 - 4x^2$

9. Un recipiente como el de la imagen se llena con un flujo de agua constante. ¿Qué gráfica relaciona el tiempo transcurrido (t) con la altura del agua en el recipiente (h)?





10. En una rifa escolar se repartirán premios grandes y pequeños. Uno de cada tres boletos saldrá premiado, pero sólo la quinta parte de los boletos ganadores tendrá un premio grande. Si en la rifa hay 600 boletos, ¿cuántos ganarán un premio pequeño?

a) 40

b) 120

c) 160

d) 2

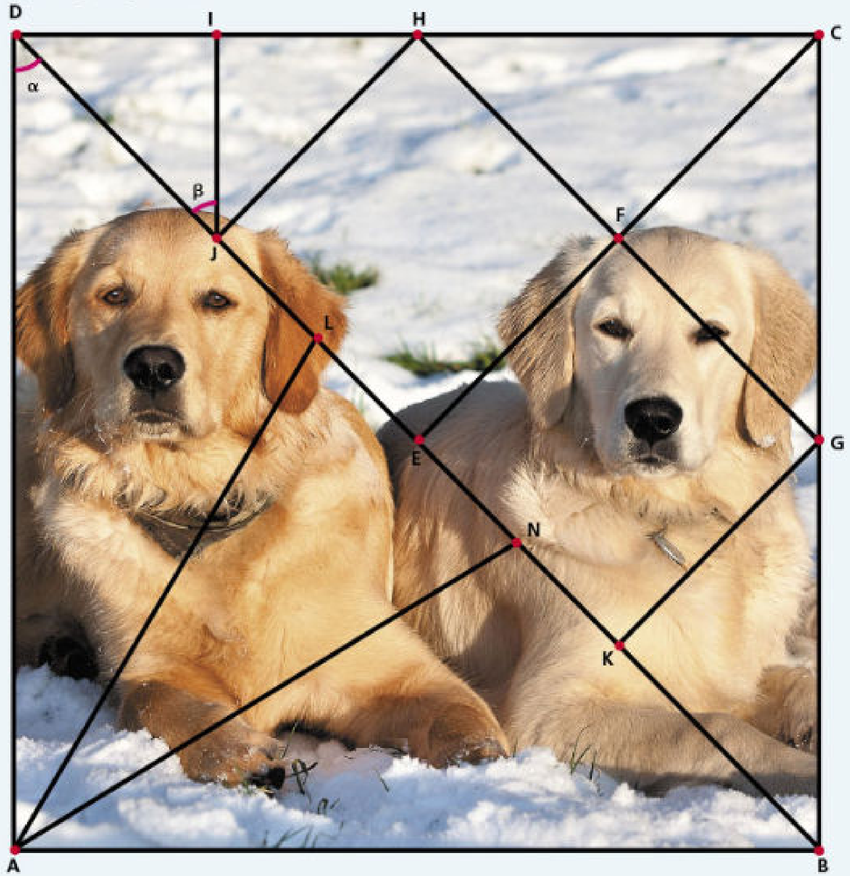
Respuestas de la evaluación correspondiente al bloque 3.

1. A B C D
2. A B C D
3. A B C D
4. A B C D
5. A B C D
6. A B C D
7. A B C D
8. A B C D
9. A B C D
10. A B C D

Lee con cuidado la situación y responde lo que se pide. Justifica tus respuestas.

Rompecabezas

Sughey le regaló a su hermano un rompecabezas geométrico en el que aplicó conocimientos de semejanza y congruencia.



Pregunta 1. Demuestra que los cuadrados **EFHJ** y **FEKG** son semejantes y congruentes. Considera que **G** y **H** son puntos medios de los lados y que **I** es punto medio de $\overline{DH}$.

Pregunta 2. Explica con qué criterio se argumenta que el Δ**ABD** y el Δ**DIJ** son semejantes y determina la razón de semejanza.

Pregunta 3. Explica porqué $\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta$.

Pregunta 4. Traza $\overline{AE}$ y justifica si el Δ**ALE** y el Δ**AEN** son semejantes. Considera que **L** y **N** son puntos medios de $\overline{JE}$ y $\overline{EK}$, respectivamente.

Pregunta 5. Prolonga $\overline{HJ}$ de forma que interseque a $\overline{DA}$; al punto de intersección en $\overline{DA}$ llámalo **M**. Demuestra que Δ**DMJ** y Δ**DAB** son semejantes.

Pregunta 6. Demuestra que Δ**DJH** y el Δ**GKB** son semejantes y congruentes.

La Pirámide del Louvre

Esta pirámide se encuentra en el patio del Museo del Louvre, en París, Francia. Está hecha de vidrio y aluminio; el arquitecto Leoh Ming Pei la diseñó y se inauguró en 1989. La base es un cuadrado de 35 m de largo. Cada cara se conforma de triángulos equiláteros y rombos; sólo hay una entrada en la cara principal.

Pregunta 1. ¿Cuántas piezas de triángulos y cuántas de rombos hay en total?

Pregunta 2. ¿Cuál es el área de las cuatro caras de la pirámide?

Pregunta 3. ¿Cuál es la altura aproximada de la pirámide? Indica dos procedimientos para estimarla.

Autoevaluación

Analiza tu desempeño en el bimestre y selecciona, en cada caso, la acción que mejor lo represente.

	Soy capaz de explicarlo a otros o ayudarlos.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resolver ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula general				
Aplicar los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas				
Resolver problemas mediante el teorema de Tales				
Aplicar la semejanza en la construcción de figuras homotéticas				
Construir e interpretar gráficas formadas por secciones rectas y curvas				
Calcular la probabilidad de eventos independientes				

Comenta con el profesor tus avances y dificultades.

La red de redes

El uso y la operación de internet están directamente relacionados con las matemáticas. Desde el instante en que tecleamos la dirección web de un sitio, el vínculo que hemos escrito se transforma en un código numérico; al crear una cuenta de correo electrónico, el sistema que provee el servicio efectúa una búsqueda exhaustiva en una base de datos para que el "identificador de usuario" que seleccionamos no se repita. La internet es una red de redes y, cada vez que enviamos información, ésta se codifica y se separa en varios "paquetes" de datos que viajan a través de nodos distintos. En cada nodo, un dispositivo llamado ruteador se encarga de calcular la ruta más eficiente para enviar cada "paquete" de información. En efecto, en todos los procesos que tienen que ver con envíos de información intervienen diversos cálculos matemáticos. Ahora bien, ¿cómo se puede codificar la información de manera que su envío sea seguro?, ¿cómo es posible identificarse al enviar información?, ¿cuál es el tiempo aproximado de respuesta para una página web y el número máximo de usuarios que soporta?, ¿cómo se programa un buscador para que sus resultados sean confiables? Investiga el proceso para colocar los cables de fibra óptica submarinos que hacen posible la transmisión de datos trasatlántica.

Bloque 4

Aprendizajes esperados

1. Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
2. Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
3. Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: patrones y ecuaciones

Contenido

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

Sucesiones de figuras

1. Reúnete con un compañero. Hagan lo que se indica.

a) Revisen la sucesión de figuras y respondan.

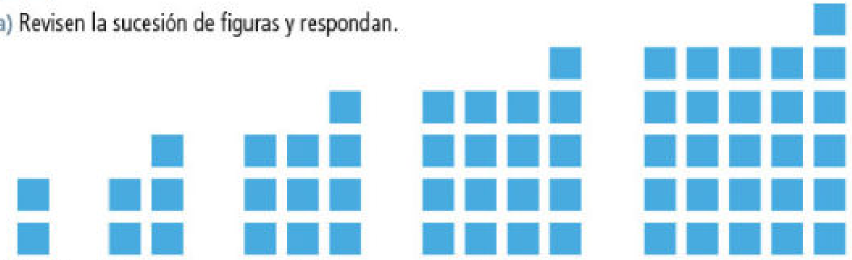


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

i. Escriban la sucesión que corresponde al número de cuadrados de cada figura. ______

ii. ¿Cuáles son los siguientes cinco términos de esa sucesión? ______

iii. Si se continúa la sucesión de figuras, ¿cuántos cuadrados tiene la figura 10? ______

iv. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 20? ______

v. Expliquen cómo se encuentra el número de cuadrados de cualquier figura. ______

______

vi. Si se representa con *n* el orden en que aparece una figura, escriban una expresión algebraica que corresponda al número de cuadrados de la figura que está en la posición *n*. ______

b) Analicen la sucesión de figuras y respondan.

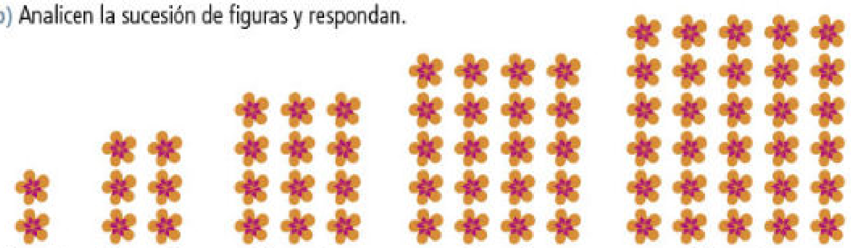


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

i. Escriban la sucesión que corresponde al número de flores de cada figura. ______

ii. ¿Cuáles son los siguientes cinco términos de esa sucesión? ______

iii. Si se continúa la sucesión de figuras, ¿cuántas flores hay en la figura 10? ______

iv. ¿Cuántas flores tiene la figura 20? ______

v. Expliquen cómo se encuentra el número de flores de cualquier figura. ______

______

c) Completen la tabla respecto a la segunda sucesión y respondan las preguntas.

Número de figura	Número de flores en la base	Número de flores en la altura	Total de flores
1			
2			
3			
4			
10			
20			
30			

i. Si *n* representa el lugar que ocupa una figura de la sucesión, ¿cuántas flores tiene en la base una figura que está en la posición *n*? ______

ii. ¿Cuántas flores tiene en la altura una figura que está en la posición *n*? ______

iii. Escriban una expresión algebraica que corresponda al número de flores de la figura que está en la posición *n*. ______

iv. ¿Esta expresión algebraica es cuadrática? Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Con la guía de su profesor, discutan lo siguiente: en la sucesión del inicio, ¿hay alguna figura de 300 cuadrados?, en la de flores, ¿hay alguna figura de 2 070 flores? Escriban una conclusión sobre los procedimientos que usaron para responder.

Un paso adelante

2. Reúnete con un compañero. Observen la sucesión de figuras y efectúen lo que se indica.

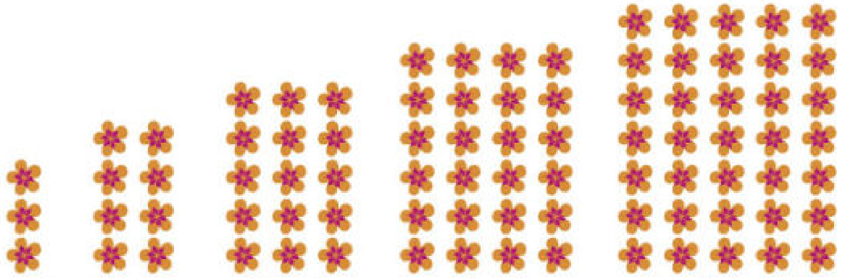


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el número de flores de la figura *n*? ______

b) Expliquen el procedimiento que siguieron para encontrar la expresión algebraica. ______

______

______

c) ¿La expresión corresponde a una relación lineal o cuadrática? Justifiquen su respuesta.

d) ¿Cuántas flores habrá en la figura 100 de la sucesión? ______

e) ¿Existe alguna figura de 3 135 flores? Justifiquen su respuesta. ______

______

f) ¿Existe alguna figura que tenga 15 925 flores? Justifiquen su respuesta. ______

______

g) Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen sus respuestas. Analicen cómo determinaron si la expresión que corresponde a la sucesión es cuadrática o lineal y cómo determinaron sus respuestas en los incisos e) y f). Con la guía de su profesor lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas.

3. Reúnete con un compañero. Observen la sucesión y efectúen lo que se indica.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, …

a) ¿Cuáles son los siguientes cinco términos de la sucesión? ______

b) Expliquen cómo lo determinaron. ______

______

c) Completen la tabla.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sucesión 1	1	3	6	10	15	21	28	36		
Sucesión 2 $n^2 + n$										

d) Determinen la relación entre las dos sucesiones. ______

e) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la sucesión 1? ______

f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Analicen la expresiones algebraicas a las que llegaron. Indiquen una conclusión sobre la manera en que se puede determinar si una expresión algebraica corresponde o no a una sucesión.

Profundiza

4. Observa las sucesiones y haz lo que se indica.

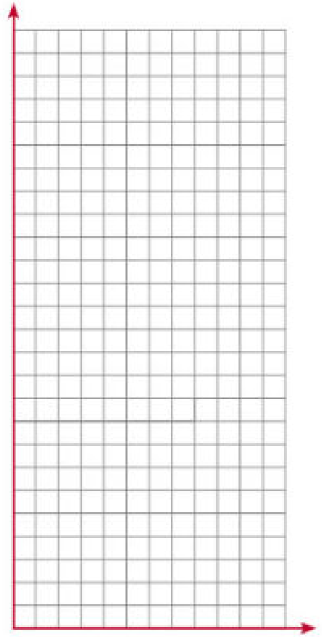
Sucesión 1: $n^2 + 3$

Sucesión 2: −4, −1, 4, 11, 20, 31, 44, 59, …

Sucesión 3: 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, …

Sucesión 4: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, …

a) Ubica los términos de las sucesiones en el plano cartesiano.



b) Escribe la expresión algebraica que corresponde a cada sucesión.

Sucesión 1: $n^2 + 3$

Sucesión 2: ______

Sucesión 3: ______

Sucesión 4: ______

c) Describe cómo determinaste las expresiones algebraicas. ______

______

d) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Con la guía de su profesor lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas. Comenten cómo se determina que una sucesión tiene crecimiento cuadrático. Escriban una conclusión en su cuaderno.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-179a. Resuelve los reactivos 35 y 37 de tercero de secundaria, Matemáticas, sobre variación cuadrática. Lee las retroalimentaciones que se dan para cada inciso y escribe en tu cuaderno un resumen de éstas.

Explora www.redir.mx/matret3-179b. Haz clic en "Sucesiones de figuras y expresiones cuadráticas" y observa el video. Compara las sucesiones presentadas ahí con las trabajadas en la lección, además de la regla general en cada caso.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 33 en la bitácora de la página 212.

Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: patrones y ecuaciones

Contenido

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

Comparación de sucesiones

1. Trabaja con un compañero. Analicen las sucesiones, en cada caso escriban los cinco términos que siguen. Efectúen lo que se indica. Justifiquen sus respuestas en el cuaderno.

Sucesión A: 3, 6, 9,12,15, ______, …

Sucesión B: 1, 5, 13, 25, 41, ______, …

Sucesión C: 5, 8, 11, 14, 17, ______, …

Sucesión D: 3, 8, 15, 24, 35, ______, …

Sucesión E: 0, 5, 16, 43, 66, ______, …

Sucesión F: 3, 6, 12, 24, 48, ______, …

a) Señalen las sucesiones lineales, es decir, cuya fórmula general es de la forma $an + b$, donde a y b son constantes.

b) Escriban, junto a las sucesiones, la expresión algebraica que representa la regla general de las sucesiones lineales.

c) ¿Cuáles son cuadráticas, es decir, en su fórmula general n tiene exponente 2? ______

d) ¿Alguna sucesión no es lineal ni cuadrática? Si es así, indiquen cuál. ______

e) Escriban la expresión algebraica que corresponde a tres sucesiones cuadráticas.

Sucesión G: ______

Sucesión H: ______

Sucesión I: ______

f) Indiquen los primeros términos de cada sucesión.

Regla: ______										
Número de término	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Término de la sucesión										

Regla: ______										
Número de término	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Término de la sucesión										

Regla: ______										
Número de término	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Término de la sucesión										

g) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Analicen los procedimientos que usaron para determinar si una sucesión es lineal o cuadrática. Expliquen por qué las expresiones que escribieron corresponden a sucesiones cuadráticas y escriban una conclusión al respecto entre todos.

Un paso adelante

2. Lee el planteamiento y haz lo que se pide.

a) Una manera de saber si una sucesión es lineal o cuadrática consiste en establecer diferencias entre los términos sucesivos. Completa cada tabla con los primeros seis términos de cada sucesión y los niveles 1 y 2 de las diferencias.

Sucesión						
Término	2	8	18	32	50	72
Nivel 1	6	10				
Nivel 2						

b) Completa las tablas con base en las sucesiones que se indican.

Regla de la sucesión: $4n^2 - 2n + 1$						
Término						
Nivel 1						
Nivel 2						

Regla de la sucesión: $6n - 2$						
Término						
Nivel 1						
Nivel 2						

c) ¿Cuál o cuáles de las sucesiones son lineales? ______

d) ¿Cuál o cuáles son cuadráticas? ______

e) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la regla general de la primera sucesión? ______

f) Escribe tus conclusiones respecto a las diferencias entre los términos sucesivos de nivel 1 y de nivel 2.

______

______

______

g) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Si tienen dudas, coméntenlas con su profesor y aclárenlas con las aportaciones de todos.

3. Lee la información y lleva a cabo lo que se indica.

La expresión general de una sucesión cuadrática es una expresión cuadrática de la forma $an^2 + bn + c$, donde a es el coeficiente del término cuadrático, b es el coeficiente del término lineal y c es el término independiente. En las sucesiones cuadráticas, el nivel 2 de las diferencias entre los términos sucesivos es igual a una constante diferente de 0.

4. Trabaja con un compañero, efectúen lo que se indica y respondan.

a) Completen las tablas con los primeros seis términos de cada sucesión y los niveles 1 y 2 de las diferencias.

Regla de la sucesión: $3n^2 + n$		a =		b =		c =
Término de la sucesión						
Nivel 1						
Nivel 2						

Regla de la sucesión: $2n^2 - 3n + 5$		a =		b =		c =
Término de la sucesión						
Nivel 1						
Nivel 2						

b) ¿Cuál es la relación entre el coeficiente del término cuadrático de la expresión algebraica (*a*) y la constante que aparece en el nivel 2 de las diferencias? Justifiquen la respuesta en su cuaderno.

c) En cada caso, hagan la suma $3a + b$. ¿A qué término del nivel 1 de las diferencias es igual? ______

d) En cada caso, hagan la suma $a + b + c$. ¿A qué término de la sucesión es igual? ______

e) Comparen sus respuestas con las de las otras parejas. Si tienen dudas, coméntenlas con su profesor y resuélvanlas con las aportaciones de todos. Completen las reglas respecto a la relación de los coeficientes de la expresión cuadrática de una sucesión y los términos de la sucesión, y de los dos primeros niveles de las diferencias.

$a + b + c =$ primer término de la sucesión

$3a + b =$ ______ $2a =$ ______

Profundiza

5. Reúnete con un compañero. Hagan lo que se indica.

a) Las siguientes sucesiones corresponden a lo que los griegos llamaban *números figurativos*, porque los números se pueden representar con formas geométricas. Escriban la expresión algebraica mediante la que se obtienen todos los términos de las sucesiones.

i. Números triangulares

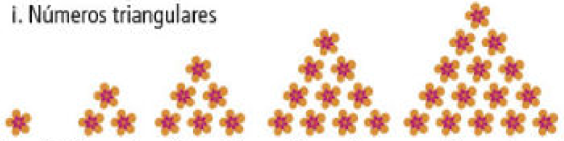


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Expresión algebraica: ______

ii. Números cuadrados

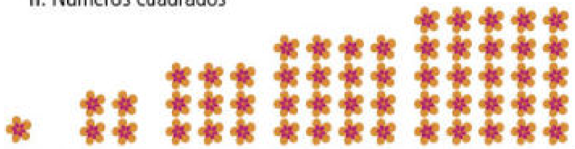


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Expresión algebraica: ______

iii. Números rectangulares

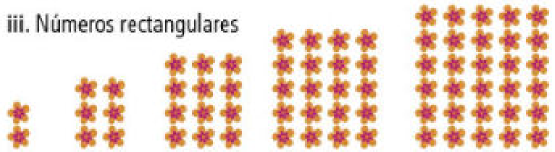


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Expresión algebraica: ______

iv. Números pentagonales

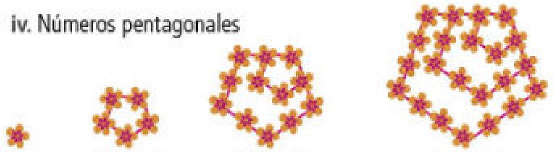


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Expresión algebraica: ______

b) Verifiquen que, en todos los casos, a partir de la expresión algebraica se obtengan los términos de la sucesión. Comprueben que se cumplan las relaciones que obtuvieron en el inciso e) de la actividad anterior. En particular, expliquen cómo llegaron a la expresión algebraica que corresponde a los números pentagonales.

c) Indiquen si las expresiones son verdaderas o falsas. Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

i. 276 es un número triangular. ______ ii. 14 782 es un número rectangular. ______

iii. 41 411 es un número cuadrado. ______ iv. 3 290 es un número pentagonal. ______

d) Si *n* representa la posición o el orden en que aparece un número de cada sucesión, determinen la expresión algebraica que representa la regla general de cada sucesión.

i. −7, −4, 1, 8, 17, … Expresión algebraica: ______

ii. 5, 20, 45, 80, 125, … Expresión algebraica: ______

iii. 4, 10, 18, 28, 40, … Expresión algebraica: ______

iv. 11, 18, 29, 44, 63, … Expresión algebraica: ______

e) Con la guía de su profesor, comparen sus respuestas con las del resto del grupo. Comenten cómo las obtuvieron y lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas. Comenten las dudas y las dificultades que afrontaron al trabajar las lecciones de sucesiones cuadráticas.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-183a. Resuelve el reactivo 36 de tercero de secundaria, Matemáticas, sobre variación cuadrática. Lee las retroalimentaciones que se dan para cada inciso.

Explora www.redir.mx/matret3-183b. Efectúa las actividades sobre sucesiones geométricas. Comenta tus dudas y experiencias con un compañero.

Traza la sucesión de figuras que corresponde a los números hexagonales. Escriban la expresión algebraica que corresponde a esa sucesión.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 34 en la bitácora de la página 212.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: figuras y cuerpos

Contenido

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos

Algodones de azúcar

Karina elabora algodones de azúcar; para ello usa un recipiente con un cabezal en el centro. Dentro del cabezal se coloca el azúcar, ésta se calienta ahí hasta que se derrite y se licúa. El cabezal gira a gran velocidad y a los costados tiene muchos agujeros diminutos. Al girar, la fuerza centrífuga provoca que el líquido salga por los orificios, de manera casi inmediata el líquido se enfría y se forman finas hebras de azúcar que se adhieren a un palito al que se le da vueltas. Observa las fotografías.

1. Trabaja con un compañero. Efectúen lo que se indica y respondan en su cuaderno.

a) Al girar se va formando el cuerpo del algodón de azúcar. Describan las características de ese cuerpo.

b) Discutan qué relación se puede establecer entre la acción de girar y la formación del cuerpo del algodón de azúcar. ¿La inclinación y la posición del palito dentro del recipiente tiene que ver con la forma del algodón de azúcar? Expliciten sus conjeturas.

c) Observen la imagen de la izquierda. Expliquen y describan cómo se obtuvo ese cuerpo del algodón de azúcar.

d) El equipo de Marco Aurelio, alumno de tercero de secundaria, propuso la conjetura de construir un cuerpo retomando dos características del proceso de elaboración de los algodones de azúcar:

- Usar un palo de madera como eje y pegarle un triángulo de cartoncillo, en sustitución de los hilos de azúcar que se van agregando por efecto del calor.
- Girar el palo de tal manera que simule la acción del motor.

i. ¿Es viable la conjetura del equipo de Marco Aurelio?

ii. ¿Qué modificarían?

iii. ¿Propusieron algo parecido? Justifiquen su respuesta.

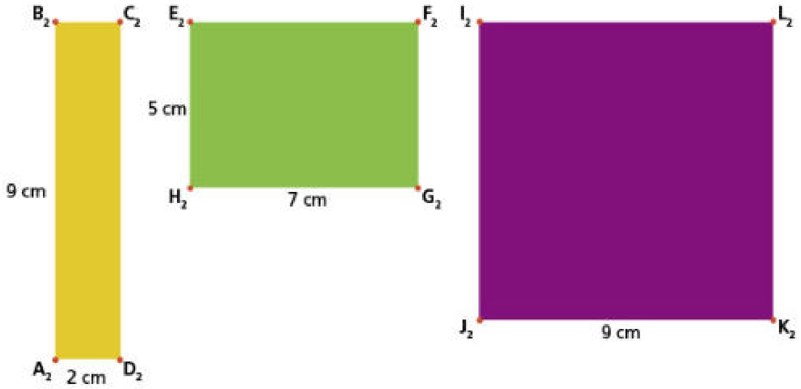
e) Considerando la propuesta de Marco Aurelio, ¿qué tipo de figura plana puede generar un cuerpo similar a los algodones de azúcar? Justifiquen su respuesta.

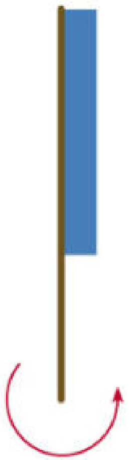
f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Preparen el material para llevar a cabo la propuesta del equipo de Marco Aurelio. Expliciten las explicaciones y conjeturas a las que lleguen entre todos y registren sus acuerdos.

Un paso adelante

2. Trabaja con dos o tres compañeros. Efectúen lo que se pide. Respondan y justifiquen en su cuaderno.

a) Usen un material de reciclado, como las pastas de plástico de engargolados que ya no usen o los pedazos de cajas de cartón. Usen materiales que no se doblen con facilidad. Reproduzcan los cuadriláteros en el material seleccionado; adicionen una pestaña de 1 cm en uno de los lados, y peguen cada rectángulo en un palo de madera.





b) El palo de madera cumple con la función de eje de rotación. Gírenlo 360° en una sola dirección, como se ejemplifica en la imagen, ¿qué sucede con el rectángulo amarillo al girar el eje de rotación? Expliquen en detalle. Repitan varias veces el experimento con cada cuadrilátero.

c) ¿Qué cuerpo geométrico se genera? Describan sus características.

d) Repitan el experimento colocando en el eje (palo de madera) el rectángulo verde y el cuadrado. Describan las características de los cuerpos geométricos que se generan.

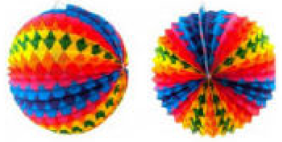
e) Registren los datos necesarios en la tabla.

Cuadrilátero	Dibujo del cuerpo geométrico generado al rotar el eje 360°	Medida de la altura del cuerpo	Características de sus bases
rectángulo amarillo			
rectángulo verde			
cuadrado			

f) Comenten en clase sus dudas y las dificultades que tuvieron. Registren sus acuerdos respecto a las características de los cuerpos geométricos que se generan al girar un rectángulo sobre un eje.

Profundiza

3. Trabajen con dos o tres compañeros. Efectúen lo que se solicita. Respondan y justifiquen en su cuaderno.



a) En las fiestas del pueblo de Lupita, suelen usar farolillos de papel —conocidos como *farolillos abanico*— para adornar las calles. Si se sigue una estrategia parecida a la empleada en la actividad anterior, ¿qué tipo de figura plana puede generar un farolillo como los que se muestran?

i. ¿Qué características debe tener la figura plana para que, al pegarla y girarla sobre el eje de rotación, se forme un cuerpo geométrico semejante a los farolillos?

ii. Tracen la figura geométrica que consideraron y péguenla sobre un palo de madera para que sea el eje de rotación. Hagan girar el palo 360° hacia una misma dirección.

iii. ¿Qué forma tiene el cuerpo geométrico que se generó con la figura plana?

iv. ¿Qué diferencias identifican entre el cuerpo geométrico generado y los farolillos que se muestran?

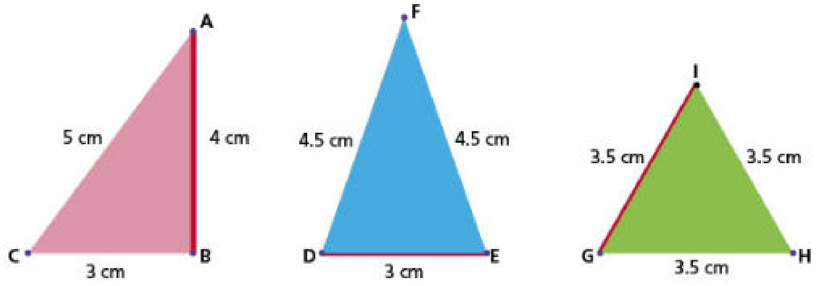
b) Reproduzcan tres figuras semejantes a las que consideraron. Péguenlas al eje de rotación y gírenlas. Con base en ello, completen los datos de la tabla.

Características de las figuras	Dibujo del cuerpo geométrico generado al rotar el eje	Características de las caras del cuerpo

4. Efectúen lo que se indica. Respondan y justifiquen en su cuaderno.

a) Con base en sus experiencias anteriores, si ahora se coloca en el eje de rotación un triángulo cualquiera, ¿qué cuerpo geométrico se generará? Expliquen en detalle.

b) Supongan que cada triángulo se pega al eje de rotación por el lado señalado con rojo. Completen la tabla. Expliquen las características y diferencias de cada cuerpo geométrico que se genera.



Características del triángulo	Dibujo del cuerpo geométrico generado al rotar el eje	Características de las caras del cuerpo	Características de sus bases	Medida de la altura del cuerpo

c) ¿El cuerpo geométrico que se genera será diferente si el rectángulo rosa se pega al eje de rotación por otro de los lados? ¿Y si se pega el triángulo rosa por el tercer lado?

d) ¿Qué cuerpo geométrico se genera al pegar el triángulo azul por los dos lados que no consideraron?

e) Consideren el triángulo verde. ¿El cuerpo geométrico que se genera es el mismo si éste se pega al eje de rotación por cualquiera de sus lados?

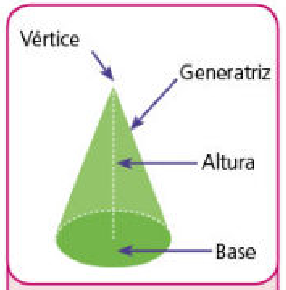
5. Comparen sus respuestas de las actividades 3 y 4 con las de sus compañeros. Comenten las dudas y las dificultades que afrontaron, y aclárenlas con ayuda de su profesor. Lean y analicen la información.

Los **sólidos de revolución** se obtienen al girar una figura plana alrededor de un eje. Tres cuerpos de revolución son el cilindro, el cono y la esfera.

- El cilindro recto es el cuerpo que se obtiene al girar un rectángulo sobre uno de sus lados.
- La esfera se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.
- El cono se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

a) Un rectángulo mide 10 cm de base y 13.5 cm de altura. Identifiquen la medida de la altura y las medidas de la base de los cilindros que se generan al girar el rectángulo alrededor de cada uno de sus lados.

b) Ponte de acuerdo con un compañero para el trabajo de la siguiente lección. Lleven a la clase dos recipientes cilíndricos de diferentes tamaños, cuatro pliegos de cartoncillo delgado, papel, pegamento y varios conos para beber agua.



Con base en el triángulo rosa de la actividad 4, identifica la medida de la generatriz, la altura y las medidas de la base de los conos que se generan al girar el triángulo alrededor de cada uno de sus catetos.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-187a. Efectúa la actividad. Describe en el cuaderno las características de los cuerpos geométricos que se mencionan.

Explora www.redir.mx/matret3-187b. Encontrarás información sobre conos y cilindros. Haz un resumen en tu cuaderno.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 35 en la bitácora de la página 212.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: figuras y cuerpos

Contenido

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos

De diferentes maneras

Para un proyecto de la escuela, Alejandra forrará varios recipientes cilíndricos con papel mica y elaborará varios conos de papel. Ella quiere calcular cuánto material necesitará para forrar cada recipiente y para elaborar los conos, de manera que se gaste la menor cantidad.

1. Trabaja con un compañero. Efectúen lo que se indica.

a) Midan lo necesario en los recipientes que llevaron a clase para forrarlos. Indiquen en el espacio las medidas de éstos y representen geométricamente la forma requerida del papel para forrar sus caras laterales. Junto a esta figura, tracen otra que represente la forma de las bases de cada recipiente.

b) Tracen el bosquejo de una figura con la que, al doblarla y pegarla, se obtenga un cono como el que se muestra.

i. Indiquen, en su cuaderno, las medidas del cono que se obtiene con la figura que trazaron. Justifiquen cómo las obtuvieron.

ii. Hagan el trazo de la figura que propusieron, usen el cartoncillo y verifiquen que se forme el cono con las medidas que indicaron.

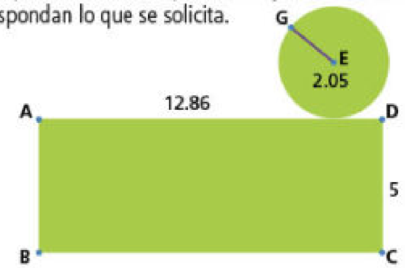
iii. Expliquen, en su cuaderno, si obtuvieron el cono con las medidas que indicaron. Especifiquen, si es necesario, qué correcciones hicieron.

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten cuál es la relación de las medidas de la base de un cilindro con las medidas del papel que se requiere para forrar la cara lateral. Registren las dudas y dificultades que surgieron durante las actividades.

Un paso adelante

2. Trabaja con dos o tres compañeros. Efectúen lo que se pide. Respondan y justifiquen en su cuaderno.

a) Armando dice que la representación geométrica que se muestra corresponde a la cantidad de papel-mica necesaria para forrar su recipiente. Chayito no está convencida y afirma que algo le falta. Analícenla y respondan lo que se solicita.



i. ¿Falta algo en el esquema de Armando para forrar su recipiente? Expliquen.

ii. ¿Cuáles son las medidas del recipiente de Armando?

iii. ¿Cuál es la relación entre el radio de la base y las medidas del rectángulo que se muestra?

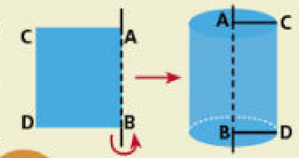
iv. Tracen la figura que representa el papel necesario para forrar un cilindro de 12 cm de altura y 8 cm de radio en sus bases (se necesita forrar la cara lateral y las dos bases). Justifiquen cómo obtuvieron las medidas de la figura.

v. Indiquen el área del papel necesario para forrarlo. Justifiquen su respuesta.

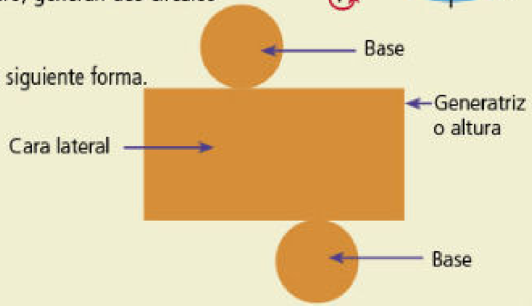
b) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Analicen las principales características geométricas de los cilindros. Lean la información y registren sus conclusiones.

El **cilindro** es el cuerpo generado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

- El lado $\overline{AB}$ es el eje de giro o eje del cilindro y su medida es la altura del cilindro.
- El lado $\overline{CD}$ genera la superficie lateral del cilindro y se denomina *generatriz del cilindro.*
- Los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ (radios del cilindro) generan dos círculos que son las bases del cilindro.



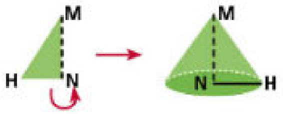
El desarrollo plano de un cilindro tiene la siguiente forma.



c) El desarrollo plano de un cilindro es un rectángulo de 12 cm de altura y 20 cm de base. Indiquen las medidas de las tapas del cilindro.

3. **Trabaja con dos o tres compañeros. Efectúen lo que se pide.**

a) Completen lo que falta con base en la siguiente construcción geométrica.



i. El cateto __________ es el eje de giro o eje del cono y su medida es ________ del cono.

ii. La hipotenusa ______ genera la superficie lateral del cono. Su medida es la generatriz del cono.

iii. La base del círculo se genera al rotar el cateto __________. Por tanto, ____________ es el radio del cono.

iv. _________ es el eje del cono, porque une el centro del círculo con la cúspide siendo perpendicular a la base.

b) Midan la base de un cono de papel. Tracen en cartoncillo el círculo que forma la base del cono.

c) Tracen una línea recta en el cono que vaya desde la cúspide hasta un punto sobre la circunferencia de la base. Corten el cono por esa línea y despliéguenlo para obtener su desarrollo plano. Úsenlo como molde y tracen la silueta obtenida en el cartoncillo. Respondan, en su cuaderno, lo que se pide.

i. ¿Qué figura geométrica es el desarrollo plano de la cara lateral del cono?

ii. ¿Cuáles son sus características?

iii. Con sus instrumentos de medida y el desarrollo plano que construyeron, obtengan los datos que se solicitan.

Características	Medida en cm
radio del cono	
altura del cono	
generatriz del cono	
perímetro de la base del cono	
ángulo del sector circular que permite formar el cono	

d) Tracen, en cartoncillo, un sector circular con un radio de 8 cm y un ángulo de 120°. Indiquen en su cuaderno las características del cono que se forma. Expliquen qué cambios hay en el cono que se forma si el ángulo del sector circular es de 160°.

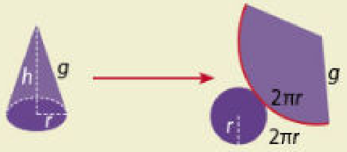
e) Un ingeniero colocará un conjunto de paneles solares de forma cónica. Por su diseño, éstos concentran mayor cantidad de luz solar que los paneles solares clásicos. Cada panel va forrado con una capa delgada de vidrio templado, por lo que el ingeniero necesita conocer la superficie lateral de cada uno. El diámetro de su base es de 1 m y su altura es de 1.2 m. Tracen en su cuaderno el desarrollo plano de cada cono y describan sus características.

f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y verifiquen que sean correctas. Comenten cómo se conoce el ángulo del sector circular con que se forma un cono a partir de la medida del diámetro de la base y la altura.

Profundiza

4. **En plenaria discutan y analicen la información.**

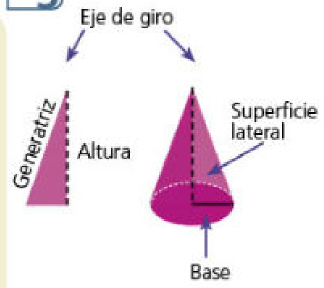
Un **cono recto** es un cuerpo geométrico formado por dos superficies. Una superficie circular, que es la base del cono, y una superficie plana, llamada *superficie lateral*, que se forma a partir de un sector circular. La superficie lateral es generada por la hipotenusa (generatriz) de un triángulo rectángulo. Para trazar el desarrollo plano de un cono se requiere conocer las medidas del radio y la amplitud angular del sector circular. El radio del sector circular es igual a la longitud de la generatriz del cono (g). Para calcular la longitud de g es necesario calcular el valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo: $g^2 = r^2 + h^2$.



La longitud del arco del sector circular (en rojo) es igual a la circunferencia de la base del cono. La medida del ángulo del sector circular o medida del ángulo α se obtiene al calcular la medida de la circunferencia de radio r que forma la base del cono con la circunferencia completa de radio g.

$$\alpha = \left(\frac{2\pi r}{2\pi g}\right)360 = \left(\frac{r}{g}\right)360$$

El ángulo entonces se calcula al comparar el radio con la generatriz y multiplicar el resultado por 360 (que representa la circunferencia completa).



5. **Efectúa lo que se indica.**

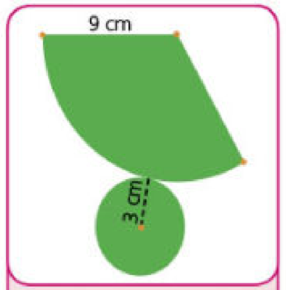
a) Traza en cartoncillo el desarrollo plano de los siguientes cuerpos geométricos. Añade las pestañas necesarias para armarlos. Forma el cono y el cilindro, y guárdalos, ya que te servirán para las lecciones sobre conos y cilindros del bloque 5.

i. Un cilindro recto de 15 cm de altura y 5 cm de radio en la base.

ii. Un cono recto de 15 cm de altura y 5 cm de radio en la base.

b) La base de un cono es una circunferencia de 10 cm de radio. Traza dos desarrollos planos de dos conos de diferente altura. Indica la altura de cada cono y el ángulo del sector circular que lo genera.

c) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comparen los desarrollos planos que trazaron. Analicen cuál es el ángulo máximo con que se traza el sector circular que genera un cono.



Indica la medida de la altura del cono que se genera con este desarrollo plano y el ángulo del sector circular.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-191a. Lee la información y efectúa las actividades. Comenta tus dudas y dificultades con un compañero.

Explora www.redir.mx/matret3-191b. Efectúa las actividades propuestas. Comenta, con tus compañeros, tu experiencia y qué te llamó más la atención.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 36 en la bitácora de la página 212.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: medida

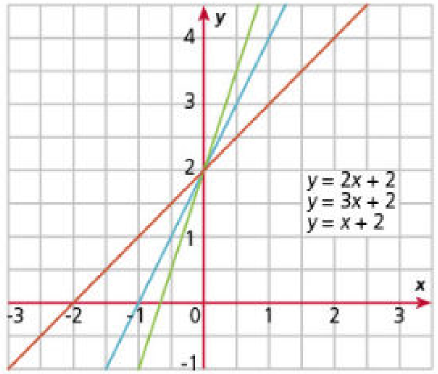
Contenido

Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

Mayor o menor a 1

1. Trabaja con un compañero.

a) Analicen las rectas y completen lo que falta.



i. La inclinación refiere a la ____________ de cada gráfica respecto al eje x.

ii. La recta ____________ tiene una inclinacion mayor que la recta ____________ y que la recta ____________

iii. Expresión algebraica del tipo de función que representan las tres gráficas: ____________

iv. En la función $y = mx + b$, el término m representa ____________

v. Si m es negativa, la gráfica... ____________

vi. Si m es positiva, la gráfica... ____________

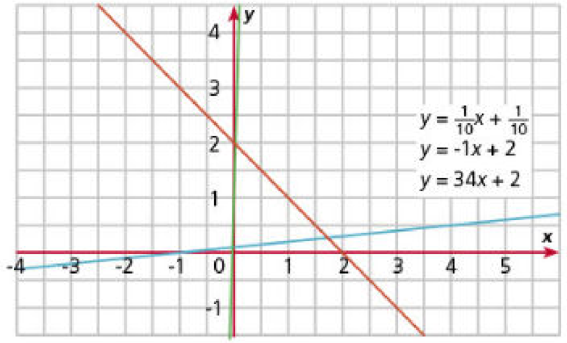
vii. Relaciona cada recta con la ecuación que la modela.

Recta verde: ____________

Recta azul: ____________

Recta roja: ____________

b) Asocia cada gráfica con el valor de su pendiente.



i. Gráfica con un valor de m negativo: ____________

ii. Gráfica con un valor de m muy pequeño pero mayor a 0: ____________

iii. Gráfica con un valor de m muy grande: ____________

c) Tracen una recta que tenga pendiente negativa. Señalen su ángulo de inclinación.

i. ¿El ángulo que señalaron es mayor o menor que 45°? ¿Es mayor o menor que 90°?

ii. ¿Es mayor o menor que 180°? Justifiquen sus respuestas en el cuaderno.

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Analicen cuál es la relación del valor de la pendiente de una recta con la medida del ángulo de inclinación. Respondan lo que se pide y escriban sus conclusiones en el cuaderno.

i. Si el valor de la pendiente es mayor que 1, ¿cómo es la medida de su ángulo de inclinación?

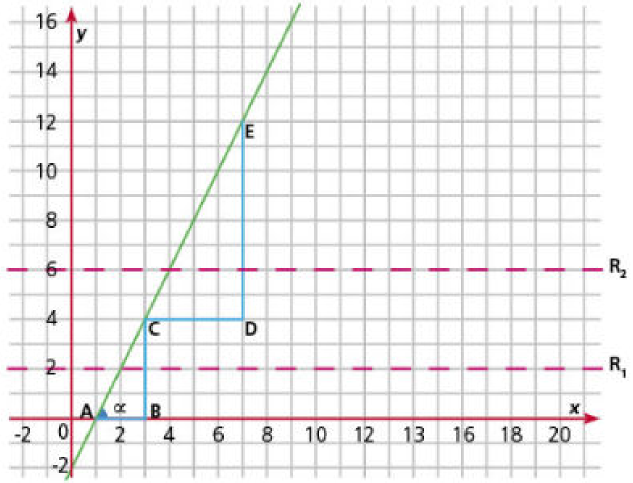
ii. Si la pendiente vale entre 0 y 1, ¿cómo es la medida de su ángulo de inclinación?

iii. Si la pendiente es negativa, ¿cómo es el ángulo de inclinación de la recta?

Un paso adelante

2. Trabaja con dos compañeros. Efectúen lo que se indica.

a) En el plano cartesiano se han trazado dos rectas paralelas al eje de las x, R_1 y R_2. Éstas pasan por los puntos (0, 2) y (0, 6).



i. Indiquen la ecuación de la recta verde. ____________

ii. ¿Cuál es su pendiente? ____________

iii. ¿Qué tipo de triángulos son el ΔABC y el ΔCDE? Justifiquen su respuesta.

iv. Indiquen la medida de dos de los lados de los triángulos.

$\overline{AB}$ ____________ $\overline{CB}$ ____________ $\overline{CD}$ ____________ $\overline{ED}$ ____________

v. Calculen el valor de los cocientes.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CB}} =$ ____________ $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{ED}} =$ ____________

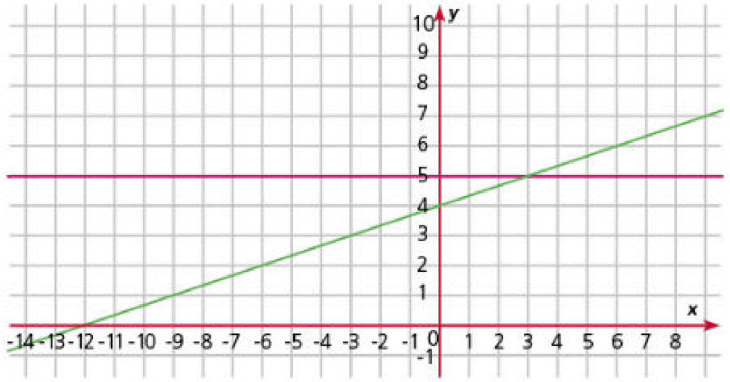
b) Tracen otras dos rectas R_3 y R_4, paralelas al eje de las x, que pasen por los puntos (0, 8) y (0, 14). Identifiquen los puntos de intersección de estas rectas con la recta verde y nómbrenlos **F** y **G**, respectivamente. Tracen el triángulo rectángulo **FGH** de manera similar a como se hizo en el inciso anterior.

i. Justifiquen, en su cuaderno, por qué los tres triángulos, Δ**ABC**, Δ**CDE** y Δ**FGH**, son semejantes.

ii. Calculen el valor del cociente $\frac{\overline{FH}}{\overline{HG}}$. ____________

c) Al comparar los tres cocientes, ¿cómo son entre sí? Escriban las conclusiones en su cuaderno.

d) En el siguiente plano, la ecuación de la recta roja es $y = 5$, y la de la recta verde es $y = \frac{1}{3}x + 4$. Respondan y justifiquen en su cuaderno.



i. ¿Cuál es la medida del ángulo de inclinación de la recta roja?

ii. ¿Cuál es su pendiente?

iii. ¿Cuál es la pendiente de la recta verde?

iv. Midan el ángulo de inclinación de la recta verde.

e) Comparen sus respuestas y analicen las justificaciones que escribieron en cada caso. Comenten qué dificultades afrontaron. Lean la información, discútanla y analícenla de forma que no queden dudas.

El ángulo de inclinación de una recta en el plano cartesiano está relacionado con su pendiente.

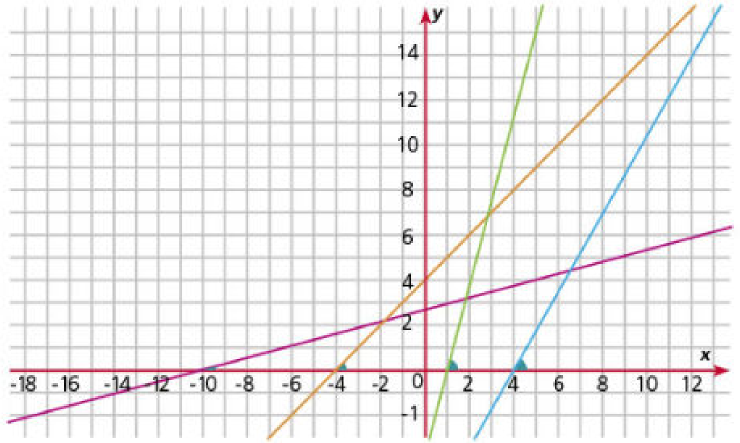
- Si la pendiente es mayor que 1, la medida del ángulo es mayor que 45° y menor que 90°.
- Cuando la pendiente es igual a 1, el ángulo de inclinación mide 45°.
- Si la pendiente está entre 0 y 1, la medida del ángulo de inclinación es menor que 45°.
- Cuando la recta es una recta horizontal, el ángulo de inclinación es de 0°, la pendiente es igual a 0 y la ecuación de la recta tiene la forma $y = k$, donde k es una constante.

Se establece una relación entre el valor del ángulo de inclinación y la pendiente. Esta relación lleva por nombre **tangente**. Se dice que la tangente del ángulo de inclinación de una recta es igual a su pendiente y se denota $\tan(\alpha) = m$, donde α representa el valor de un ángulo y m es un número.

Profundiza

3. Trabaja con un compañero. Analicen y discutan lo que se propone. Justifiquen sus respuestas en el cuaderno.

a) En el plano que se muestra se han trazado varias rectas y se indica el ángulo de inclinación de cada una. Calculen el valor aproximado de la tangente de cada ángulo.



i. tan(15°) = ______ ii. tan(45°) = ______ iii. tan(60°) = ______ iv. tan(75°) = ______

b) Tracen, en el plano, dos rectas cuya pendiente sea negativa. Indiquen las características de su ángulo de inclinación y escriban una conclusión.

i. Cuando la pendiente de una recta es negativa, el ángulo de inclinación es ____________

ii. La tangente de un ángulo ____________ es igual a un número ____________

c) Expliquen la relación entre el valor de la pendiente de una recta, el valor de su ángulo de inclinación y el cociente de los catetos del triángulo rectángulo que se forma con la recta al trazar una horizontal y una vertical.

d) Expliquen los procedimientos que usaron para calcular el valor de las tangentes. Relean lo que escribieron en el inciso c) para comprobar que sea claro y adecuado.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-195a. Encontrarás información sobre el ángulo de inclinación de una recta. Haz un resumen en tu cuaderno.

Explora rwww.redir.mx/matret3-195b. Manipula los parámetros de la recta y analiza la relación entre la tangente, la pendiente y el ángulo de inclinación. Comenta tus conclusiones con un compañero.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 37 en la bitácora de la página 212.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: medida

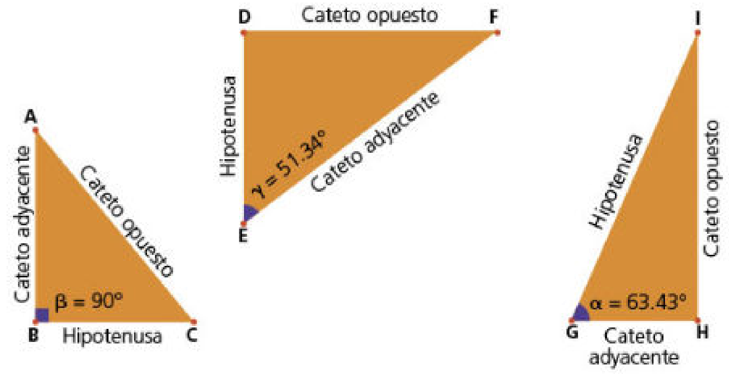
Contenido

Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

Familias de triángulos rectángulos

1. Trabaja con un compañero. Analicen y discutan lo que se propone. Respondan y justifiquen en su cuaderno.

a) Señalen los triángulos rectángulos cuyos cateto opuesto y cateto adyacente se han determinado correctamente, según el ángulo señalado en cada caso.



i. En función de su respuesta, indiquen el significado de *cateto opuesto* y *cateto adyacente*.

ii. Si cambia el ángulo que se señala, ¿se pueden seguir usando los mismos términos: *cateto opuesto* y *cateto adyacente*?

iii. ¿Por qué es incorrecta la indicación de los nombres de los lados en los triángulos que no se-ñalaron? Expliquen cada caso.

b) Completen cada frase para que sea una afirmación correcta sobre un triángulo rectángulo. El ángulo α es uno de los ángulos agudos del triángulo.

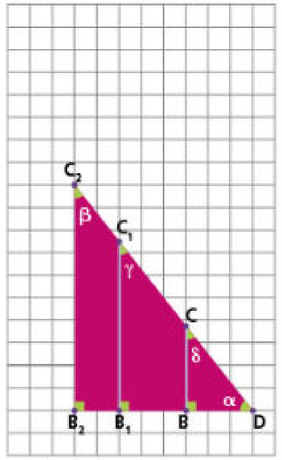
i. ______________________________ es el cateto que forma parte del ángulo α.

ii. ______________________________ es el lado de mayor longitud.

iii. ______________________________ es el cateto que no forma parte del ángulo α.

iv. ______________________________ es el lado opuesto al ángulo recto.

c) Analicen la imagen y respondan lo que se indica.



i. ¿Cómo son los tres triángulos entre sí?

ii. En función del ángulo α determinen la medida de los lados de cada triángulo.

	Cateto opuesto	Cateto adyacente	Hipotenusa
ΔCBD			
ΔC_1B_1D			
ΔC_2B_2D			

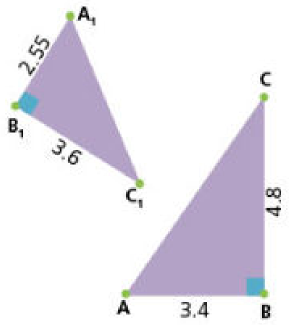
iii. Completen la tabla a partir de las medidas de los lados de los triángulos.

	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$
ΔCBD			
ΔC_1B_1D			
Δ			

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten cómo determinaron las longitudes de los lados de los triángulos. Escriban una conclusión acerca de los resultados que obtuvieron en el inciso c) iii.

Un paso adelante

2. Trabaja con dos compañeros. Lleven a cabo lo que se indica respecto a los dos triángulos rectángulos.



a) Expliquen por qué los dos triángulos son semejantes. ______________________________

____

____

b) Escriban las relaciones que se pueden establecer a partir de que las medidas de sus lados son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\square}{\square} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

c) A partir de estas igualdades, expliquen cómo se obtienen las siguientes.

i. $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}}$

ii. $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}$

iii. $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{A_1C_1}}$

d) En la tabla se indican las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo MNO. Complétenla e indiquen una opción para las medidas de los lados de un triángulo PQR que sea semejante al ΔMNO.

	Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa
ΔMNO	5	8	
ΔPQR			

e) Comprueben, en su cuaderno, que se cumpla la igualdad de los cocientes que se indican en el inciso c).

3. Lee con el grupo la información. Respondan en el cuaderno.

Dado un triángulo rectángulo, a partir del ángulo α se definen tres **razones trigonométricas**. El cateto opuesto de α se denomina **CO**, el cateto adyacente es **CA** y la hipotenusa es **H**.

- A la razón $\frac{CO}{H}$ se le denomina **seno** del ángulo y se denota como sen(α).
- Al cociente $\frac{CA}{H}$ se le denomina **coseno** del ángulo y se denota como cos(α).
- Al cociente $\frac{CO}{CA}$ se le denomina **tangente** del ángulo y se denota como tan(α).

El cociente obtenido en cada razón es el mismo para cualquier triángulo rectángulo que tenga un ángulo agudo igual a α. Al usar la función correspondiente en una calculadora científica se obtiene el valor del seno, del coseno o de la tangente a partir de un ángulo y viceversa: si se conoce el valor del ángulo, se puede obtener el valor de la razón trigonométrica.

a) Discutan la información anterior de forma que no queden dudas.

b) Retomen la familia de triángulos de la actividad 1, inciso c). Consideren que $\alpha = 51.3042$. Con su calculadora obtengan el valor de las tres razones trigonométricas respecto a ese ángulo. Comparen su respuesta con la de la actividad.

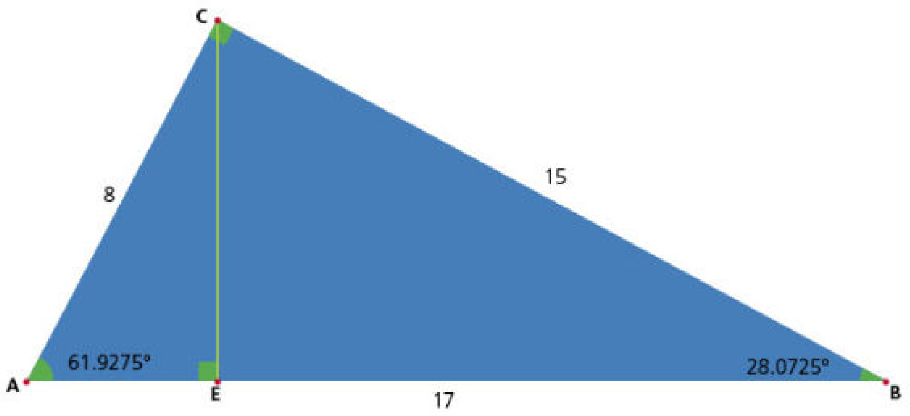
c) Calculen el valor del otro ángulo agudo de cada triángulo, usen su calculadora para encontrar el valor de las razones trigonométricas respecto a ese ángulo.

d) Exploren su calculadora e identifiquen las teclas asociadas a la inversa de cada razón trigonométrica. Con esas teclas calculen el valor de los ángulos de los triángulos de la actividad 2.

Profundiza

4. Trabaja con un compañero. Hagan lo que se pide.

a) En el triángulo **ABC** se trazó la altura $\overline{EC}$, de tal manera que en la figura hay tres triángulos: **ΔABC, ΔACE, ΔCBE**. Expliquen, en su cuaderno, por qué los tres triángulos son semejantes.



b) Completen la tabla a partir de las medidas de los lados de los triángulos. Para cada triángulo, consideren el ángulo menor.

Triángulo	ΔABC	ΔACE	ΔCBE
Cociente $\frac{CO}{H}$			
Cociente $\frac{CA}{H}$			
Cociente $\frac{CO}{CA}$			

c) Calculen, el valor de las razones trigonométricas con la calculadora.

sen(28.0725) = ________ cos(28.0725) = ________ tan(28.0725) = ________

d) Calculen el valor de las razones trigonométricas para el otro ángulo.

sen(61.9275) = ________ cos(61.9275) = ________ tan(61.9275) = ________

e) Dados dos ángulos complementarios α y β…

i. ¿Qué relación existe entre el seno de α y el coseno de β? Expliquen. ________

ii. ¿Qué relación existe entre la tangente de α y la tangente de β? Expliquen. ________

f) Respondan sin usar la calculadora. El seno de un ángulo de 40° es igual a 0.64. ¿A qué es igual el coseno de un ángulo de 50°? ________

g) Encuentren el valor del producto tan(40)tan(50)? ________

h) Comparen sus respuestas y argumentos con los de otra pareja. Verifiquen que sean correctos. Si hay dudas, extérnenlas con el fin de solucionarlas. Expliquen, con sus palabras, por qué para todos los ángulos que miden más de 45° la tangente es mayor que 1, y por qué para los ángulos cuya medida es menor que 45° su tangente es menor que 1.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-199a. Haz clic en "Seno, coseno y tangente" y observa el video. Comenta tus dudas con un compañero. Revisen las definiciones de esta lección.

Explora www.redir.mx/matret3-199b. Efectúa las actividades. Comenta, con tus compañeros, tu experiencia y qué dificultades afrontaste. Escriban una conclusión en el cuaderno.

Encuentra el valor de la suma $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha)$ y muestra que $tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 38 en la bitácora de la página 213.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: medida

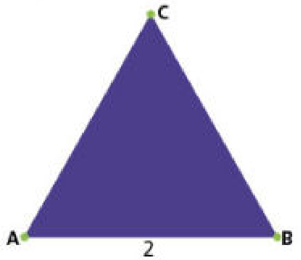
Contenido

Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente

Razones trigonométricas

1. Efectúa lo que se indica. Explica en tu cuaderno los procedimientos que lleves a cabo para responder.

a) Calcula los valores que se piden a partir de la medida indicada en el triángulo equilátero.



i. sen(30) = ______ ii. cos(30) = ______

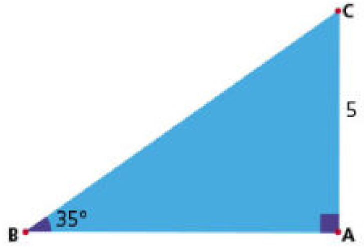
iii. tan(30) = ______ iv. sen(60) = ______

v. cos(60) = ______ vi. tan(60) = ______

b) Bosqueja un triángulo rectángulo; uno de sus ángulos agudos debe medir 45°. Calcula los valores que se indican.

i. sen(45) = ______ ii. cos(45) = ______ iii. tan(45) = ______

c) Revisa el triángulo rectángulo. Considera que tan(35) = 0.7002. Encuentra la medida de los segmentos y el valor que se pide.

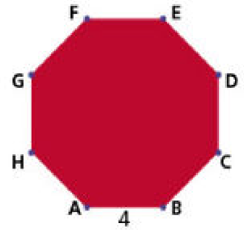


i. $\overline{AB}$ = ______ ii. $\overline{BC}$ = ______ iii. tan(55) = ______

d) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Formen un registro de todos sus procedimientos para responder, correctos e incorrectos. Escriban un breve análisis acerca de cada uno de éstos, con ayuda de su profesor.

Un paso adelante

2. Trabaja con un compañero. Observen el octágono regular y hagan lo que se indica.



a) Describan, en su cuaderno, las propiedades de este octágono.

b) ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos interiores? ______

c) Escriban una fórmula para obtener el área del octágono. ______

d) Consideren que tan(67.5) = 2.4142. Expliquen cómo usar este valor para calcular el área del octágono. ______

e) ¿Cuál es el área del octágono? ______

f) ¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita en el octágono? ______

g) ¿Cuál es el radio de la circunferencia circunscrita en el octágono? ______

h) Comparen sus respuestas con las de otra pareja y comenten cómo las obtuvieron. Comprueben sus resultados con una calculadora científica.

3. Trabaja con un compañero. Efectúen lo que se pide.

a) Desde un faro situado a 60 m sobre el nivel del mar se ve un barco a un ángulo de 60°.

i. ¿A qué distancia del faro se encuentra el barco? ______

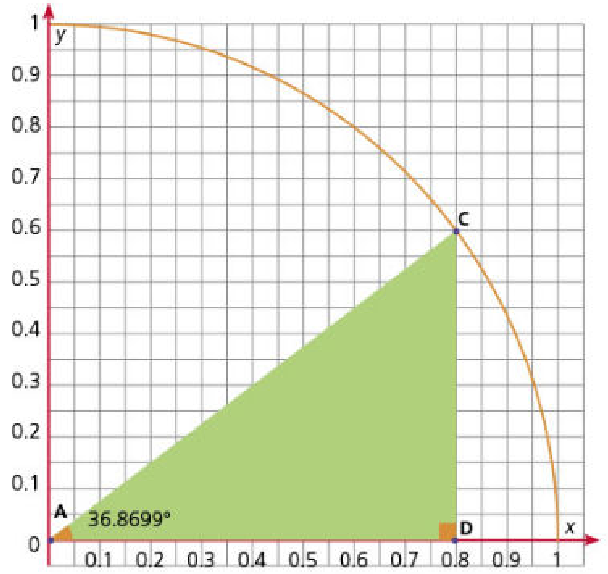
ii. Expliquen su procedimiento. Si es necesario, tracen un esquema de la situación. ______

b) El metro cuadrado de un cierto tipo de vidrio cuesta $350.00. ¿Cuánto cuesta una pieza de vidrio del mismo tipo en forma de un triángulo equilátero, cuyos lados miden 50 cm cada uno? ______

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Discutan los procedimientos de solución y qué razones trigonométricas usaron.

Profundiza

4. Haz lo que se pide. Justifica tus respuestas en tu cuaderno. El radio de la circunferencia mide 1 cm.



a) Indica las medidas de los tres lados del triángulo.

i. $\overline{AD}$ ____________ ii. $\overline{AC}$ ____________ iii. $\overline{CD}$ ____________

b) Indica los valores para el ángulo que se señala. No uses la calculadora.

sen(36.8699) = __________ cos(36.8699) = __________ tan(36.8699) = __________

c) Escribe una conclusión sobre los resultados de los incisos anteriores. ____________________

d) Si el ángulo en el vértice **A** es mayor que 36.8699°, ¿qué sucede con la medida del cateto opuesto y con la del cateto adyacente a ese ángulo? ____________________

e) ¿Qué relación tienen las medidas de los catetos con el valor del seno y del coseno de ese ángulo?

____

f) Traza otro triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea un radio de la circunferencia, un cateto debe estar sobre el eje *x* y el otro cateto debe ser paralelo al eje *y*. Sus dos ángulos agudos deben medir 45°. Indica las medidas que se piden, toma como referencia el ángulo que está en el origen de coordenadas.

Cateto opuesto: __________ Cateto adyacente: __________ Hipotenusa: __________

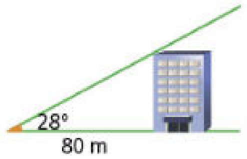
g) Traza otro triángulo similar, cuyo ángulo sobre el origen sea de 60°. Toma como referencia ese ángulo para indicar las medidas que se piden.

Cateto opuesto: __________ Cateto adyacente: __________ Hipotenusa: __________

h) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten cómo las obtuvieron. Si cuentan con una calculadora científica, úsenla para verificar sus resultados.

5. Trabaja con un compañero. Resuelvan lo que se indica.

a) El esquema muestra la longitud de la sombra que proyecta un edificio a cierta hora del día y el ángulo que se forma entre los rayos del sol y el piso. Selecciona la razón trigonométrica más eficiente para calcular la altura del edificio.

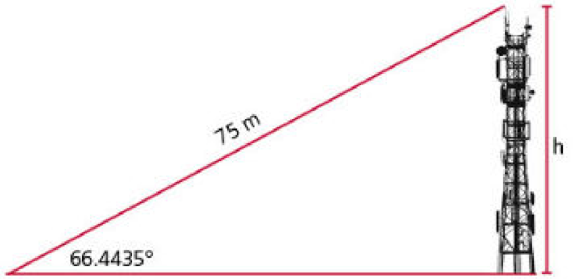


i. sen(28) ii. cos(28) iii. tan(28) iv. sen(28) v. cos(28) vi. tan(28)

b) Usen la circunferencia de radio 1 para aproximar el valor de la razón trigonométrica que calcularon.

c) Indiquen la altura del edificio. ____________________

d) Revisen los datos de la figura. Para hacer labores de mantenimiento se fijó un cable a la antena, como se indica. Calculen la altura de la antena y la distancia al punto en el que se fijó el cable.



Altura de la torre: ______________ Distancia al cable: ______________

e) Comenten sus experiencias en clase y registren las ventajas de usar las razones trigonométricas para calcular distancias o áreas.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-203a. Haz clic en "Aplicación de las razones trigonométricas" y observa el video. Comenta tus dudas con un compañero. Si es necesario, revisen las respuestas de esta lección.

Explora www.redir.mx/matret3-203b. Analiza la información y responde lo que se pide. Comenta con un compañero cómo cambia el valor de las razones trigonométricas en función del valor del ángulo de inclinación.

El coseno de un ángulo es igual a 0.3420, la tangente de ese ángulo es igual a 2.7475.

Indica cómo se calcula el seno del ángulo sin necesidad de conocer el valor de ese ángulo.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 39 en la bitácora de la página 213.

Eje: manejo de la información
Tema: proporcionalidad y funciones

Contenido

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

Las llamadas promocionales

La gráfica muestra el número de llamadas promocionales hechas cada mes por la empresa Veomega durante 2011 (el número de llamadas fue redondeado). En la gráfica, el número 1 representa el mes de enero, el 2 representa febrero, y así sucesivamente.

1. Reúnete con un compañero. Analicen la gráfica y respondan lo que se pide.

a) ¿Cuál es el número mínimo de llamadas hechas? ________ ¿En qué mes se hizo? ________

b) ¿Cuál es el número máximo de llamadas? ________ ¿En qué mes se hizo? ________

c) ¿En cuánto se incrementó el número de llamadas de enero a febrero? ________

d) ¿En cuánto se incrementó el número de llamadas de marzo a junio? ________

e) Respondan sin ver la gráfica. ¿En cuánto se incrementó el número de llamadas del mes 4 (abril) al mes 9 (septiembre)? ________

f) Si los primeros meses del siguiente año se continúa incrementando el número de llamadas al mismo ritmo, ¿cuántas llamadas se harán en abril? ________

g) En 2013, la empresa comenzó con 4 000 llamadas en enero y fue aumentando el número de llamadas al mismo ritmo cada mes. En octubre hicieron 7 150 llamadas. ¿Cuántas llamadas harán en diciembre? ________

Expliquen cómo lo calcularon. ________

h) Reúnanse con otra pareja para comparar y verificar sus respuestas. Comenten si el incremento que se dio mes con mes es constante y de qué forma pueden comprobarlo.

Un paso adelante

2. Reúnete con un compañero. Efectúen lo que se indica respecto a la situación anterior.

a) ¿Qué coordenadas en el plano cartesiano corresponden a las llamadas de enero? ________

b) Las coordenadas del sexto mes son ________

c) ¿En cuánto se incrementó el número de llamadas de enero a junio? ________

d) La razón de cambio del primer mes (enero) al sexto (junio) es el cociente del incremento en el número de llamadas con el número de meses transcurridos, calcúlenlo.

$$\text{razón de cambio} = \frac{\text{incremento en el número de llamadas}}{\text{incremento en el número de meses}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

e) ¿Cuál es la razón de cambio entre el primer mes y el último? ________

f) ¿Cuál es la razón de cambio entre el tercer mes y el octavo? ________

g) ¿A qué corresponde la razón de cambio en esta situación? ________

h) Si representamos con la letra x el número de mes y con la letra y el número de llamadas efectuadas durante ese mes, ¿cuál es la ecuación asociada a la gráfica? Subráyenla y justifiquen su elección en el cuaderno.

$y = 500x + 3\,000$ $\quad$ $y = 3\,500x$ $\quad$ $y = 3\,000x + 500$ $\quad$ $y = 4\,500x - 1\,000$

3. Trabaja con un compañero; hagan lo que se indica.

La empresa Veomega tiene contratado el paquete 1 que ofrece la compañía de teléfonos. Sin embargo, hay otro paquete, como se muestra en la tabla.

	Paquete 1	Paquete 2
Costo por llamada	$1.60	$1.15
Renta mensual	0	$5 000.00
Llamadas incluidas	0	2 000

a) ¿Qué paquete es más conveniente para la empresa? ________

Justifiquen su respuesta. ________

b) ¿Qué número de llamadas habría que hacer en ambos paquetes para igualar su costo? ________

Expliquen cómo lo calcularon. ________

c) Indiquen cuál es la ecuación que relaciona, en cada caso, el costo total con el número de llamadas.

Paquete 1: ________ Paquete 2: ________

d) ¿Cuál es la razón de cambio en el paquete 1? ________ ¿Y en el paquete 2? ________

Expliquen cómo las obtuvieron. ________

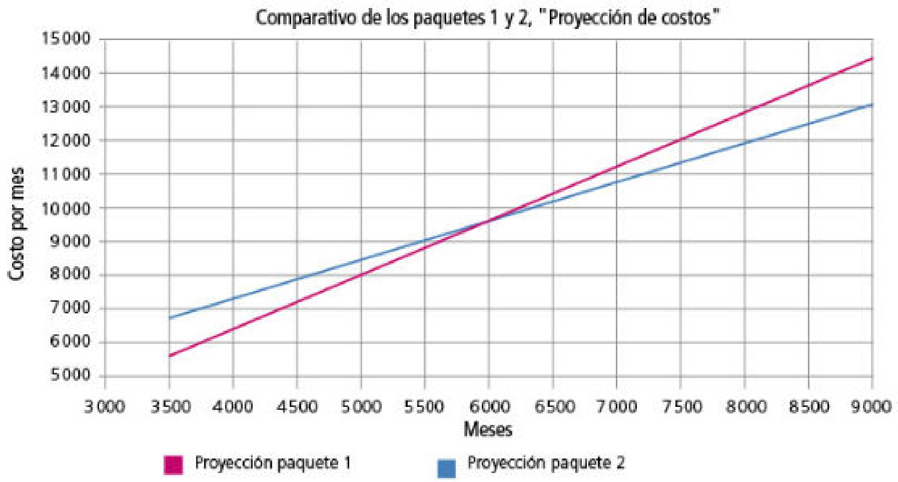
e) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Lean la información. Analicen, en las situaciones que se presentaron, cuáles son los conjuntos de cantidades relacionados y justifiquen por qué la relación corresponde a una función lineal.

En las relaciones entre dos conjuntos de cantidades cuya gráfica asociada es una línea recta, la razón de cambio entre cualquier par de puntos en ella es siempre la misma; también se dice que la razón de cambio es constante. Esta constante es precisamente la pendiente de la recta.

Profundiza

4. Reúnete con dos o tres compañeros, analicen la situación y respondan lo que se pide.

La gráfica muestra el costo mensual, según el número de llamadas, de los dos paquetes que ofrece la compañía telefónica.



a) ¿En qué meses conviene más el paquete 1? ______

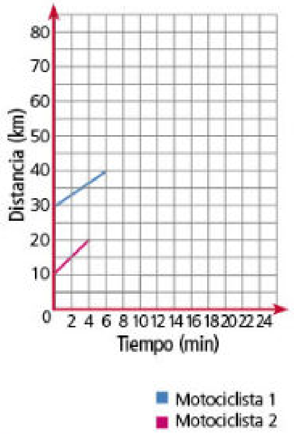
b) ¿En qué meses conviene más el paquete 2? ______

c) ¿Cuál es la razón de cambio de la recta que representa la proyección del paquete 1? ______

d) ¿Cuál es la razón de cambio de la recta que representa la proyección del paquete 2?

e) ¿Qué representa cada una de estas razones de cambio? ______

f) Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Comenten y argumenten su respuesta sobre qué paquete es más conveniente para la empresa.



5. Con el mismo equipo, efectúen la actividad.

La gráfica muestra la distancia recorrida por dos motociclistas que van a velocidad constante, ambos se dirigen a la ciudad de Toluca y salieron de distintos lugares.

a) Calcula la razón de cambio de cada recta.

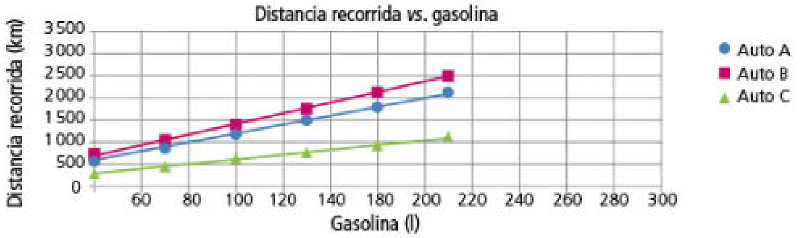
Razón de cambio del motociclista 1: ______ Razón de cambio del motociclista 2: ______

b) Si la ciudad de Toluca se encuentra en el kilómetro 80, ¿qué motociclista llegará primero? ______

c) Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Expliquen qué representa la razón de cambio en cada situación. Luego, discutan lo siguiente: si la razón de cambio de otro motociclista, el tercero, es mayor a la del motociclista 2, ¿cómo es su gráfica comparada con las que se muestran?

6. Reúnete con un compañero, analicen lo que se plantea y respondan, en su cuaderno, lo que se pide.

En un laboratorio de pruebas se analizó el rendimiento de tres automóviles (A, B, C), es decir, la distancia que recorre un automóvil por cada litro de gasolina. Los resultados se muestran en la gráfica.



a) ¿Cuál de los tres automóviles tiene mejor rendimiento por litro de gasolina? Justifiquen su respuesta.

b) ¿Cuál es, aproximadamente, la razón de cambio en el consumo de gasolina de cada automóvil?

Automóvil A: ______ Automóvil B: ______ Automóvil C: ______

c) ¿Cómo interpretan el valor de la razón de cambio?

d) ¿Hay alguna relación entre la razón de cambio y la inclinación de cada recta?

e) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten cómo estimaron el rendimiento de cada automóvil. Si tienen dudas, pidan ayuda a su profesor, coméntelas con el grupo y lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas. Una vez que todos estén de acuerdo, escriban una ecuación que represente cada una de las rectas. Lean y comenten la información.

La pendiente o razón de cambio de una recta que representa una relación entre dos conjuntos de cantidades se puede calcular si se conocen dos puntos cualesquiera sobre la gráfica, digamos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). La pendiente o razón de cambio es igual a...

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si se conoce la ecuación de la recta, la pendiente o razón de cambio es el coeficiente del término en x, por ejemplo, para la ecuación $y = 3x - 1$ la pendiente es 3.

La pendiente o razón de cambio indica el cambio relativo de la variable y respecto a la variable x.

Tiempo	Pipa 1	Pipa 2	Pipa 3
0	15000	20000	25000
10	12500	15000	17500
20	10000	10000	10000

La tabla indica los datos que se obtuvieron durante la descarga de tres pipas de agua. Calcula la razón de cambio de cada una. ¿A cuál corresponde la ecuación $y = -500x + 20000$? Escribe las ecuaciones para las otras dos.

Indica qué unidad de medición se está usando para cada una de las variables.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-207a. Resuelve el reactivo 42 de tercero de secundaria, Matemáticas, sobre razón de cambio. Lee las retroalimentaciones que se dan para cada inciso.

Explora www.redir.mx/matret3-207b. En ella encontrarás más sobre cómo calcular la pendiente de una recta a partir de dos puntos localizados y más información sobre el cálculo de la razón de cambio.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 40 en la bitácora de la página 213.

Eje: manejo de la información
Tema: análisis y representación de datos

Contenido

Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

Encuesta sobre el *bullying*

De acuerdo con los datos de una encuesta sobre el acoso escolar, también llamado *bullying*, que llevó a cabo la Secretaría de Educación (SE) del Distrito Federal y la Universidad Intercontinental en 29 primarias y secundarias, se obtuvieron los resultados siguientes a la pregunta: ¿en qué lugar te intimidan?[1]

40% respondió que en el baño.
19% respondió que en el salón sin profesor.
17% respondió que en el recreo con profesor.
9% respondió que en el camino a la escuela.
7% respondió que en el camino a casa.
4% respondió que en el recreo sin profesor.
4% respondió que en el salón con profesor.

1. Trabaja con un compañero lo que se indica.

a) ¿Cuál es el propósito de la encuesta? ______

b) Describan las características de la muestra asociada a la encuesta. ______

c) Escriban, en su cuaderno, una conclusión sobre los resultados mostrados.

2. Analicen la situación y efectúen lo que se pide.

a) En la escuela de Javier, los alumnos decidieron hacer una encuesta para identificar la problemática del acoso escolar. En cada grupo entrevistaron a 20 mujeres y 20 hombres. Analicen la tabla y complétenla.

Grupo	A	B	C	D	E	F	Promedio
Mujeres que han sufrido *bullying*	20	18	15	20	14	11	
Hombres que han sufrido *bullying*	20	12	19	20	20	17	
Total de alumnos							

Fuente: elaboración propia.

b) Al comparar los promedios por género (varones y mujeres) de los alumnos que han sufrido *bullying*, ¿cuál de los promedios es mayor? ______

c) Analicen la información correspondiente a la última columna. ¿En qué grupos el número de mujeres intimidadas superó el promedio? ______

d) ¿En qué grupos el número de varones que sufrieron acoso escolar estuvo por debajo del promedio? ______

3. Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Discutan sus justificaciones sobre el propósito de la encuesta efectuada por la SEP y registren sus conclusiones.

[1] Mónica Archundia, "Internet, una nueva arena para *bullying*", en *El Universal*, 27 de mayo de 2013, disponible en www.eluniversal.com.mx/notas/849676.html. (Consulta: 6 de junio de 2013).

Un paso adelante

4. Trabaja con un compañero. Retomen los datos de la actividad 2 para hacer lo que se indica.

a) Completen la tabla con los datos que se piden.

Grupo	Mujeres que han sufrido *bullying*	Comparación respecto al promedio	Hombres que han sufrido *bullying*	Comparación respecto al promedio
A	20	El número de mujeres es de 3.66 arriba del promedio.	20	
B	18		12	El número de varones es de 6 por debajo del promedio.
C	15		19	
D	20		20	
E	14		20	
F	11		17	

b) Escriban en su cuaderno una conclusión respecto a la relación entre el número de alumnas que han sufrido *bullying* en cada grupo y el promedio de estos datos.

c) Hagan lo mismo respecto a la relación entre el número de alumnos y el promedio.

d) Respondan respecto al total de alumnos.

i. ¿En qué grupo el total de alumnos que sufrieron acoso escolar es mayor? ______

ii. ¿En qué grupo la diferencia entre el promedio de los seis grupos y el total de alumnos que sufrieron *bullying* es mayor? ______

iii. ¿En este caso, el total está por arriba o por debajo del promedio? ______

e) Para el caso de las mujeres que han sufrido *bullying*, ¿cuál es la diferencia entre el dato mayor y el menor? ______

f) Para el caso de los hombres, ¿cuál es la diferencia entre el dato mayor y el menor? ______

g) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten la información que está en esta página y en la siguiente.

Cuando se analizan varios datos es importante compararlos y analizar su comportamiento de distintas formas. Por ejemplo, el número de alumnas del grupo B se encuentra 1.66 arriba del promedio y el número de alumnos está 6 por debajo del promedio.

En estadística, dos medidas importantes son la **desviación media** y el **rango**. Estas medidas permiten determinar la desviación o separación de un conjunto de datos.

Para calcular la **desviación media** de un conjunto de datos, por ejemplo: 3, 4, 5, 1, 9 y 5, primero se calcula el promedio de los datos: $\frac{3+4+5+1+9+5}{6} = 4.5$

Luego, para cada dato, se calcula el valor absoluto de su diferencia respecto al promedio y se hace la suma de estos valores absolutos.

En el ejemplo, $|3 - 4.5| + |4 - 4.5| + |5 - 4.5| + |1 - 4.5| + |9 - 4.5| + |5 - 4.5| = 11$.

Finalmente, se divide este último resultado entre el número de datos para obtener la desviación media, en este caso es igual a $\frac{11}{6} = 1.8333333...$

En otras palabras, la desviación media de un conjunto es el promedio del valor absoluto de las diferencias de los datos respecto a la media aritmética.

El **rango** o **recorrido** es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de un conjunto de datos. Por ejemplo, en el conjunto de datos anterior, el valor máximo es 9 y el valor mínimo es 1, entonces el rango es igual a 8.

5. Trabaja con un compañero. Retomen los datos de la tabla de la actividad 4. Efectúen lo que se indica.

a) ¿Cuál es la desviación media de los datos que corresponden a los hombres? ___________

b) ¿Cuál es la desviación media de los datos que corresponden a las mujeres? ___________

c) ¿Cuál de los dos conjuntos de datos tiene mayor desviación media? ___________
Escriban una conclusión en su cuaderno a partir de esto.

d) Obtengan las medidas que se piden.

i. Rango del total de alumnos: _______ ii. Desviación media del total de alumnos: ___________

e) Para dos conjuntos de datos similares a los que se han presentado, uno tiene un rango igual a 3 y el otro tiene un rango igual a 12. ¿Qué conclusión pueden obtener sobre estos dos conjuntos? Descríbanla en su cuaderno.

f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten por qué el rango y la desviación media son medidas que permiten conocer la dispersión de un conjunto y de cada uno de sus datos. Después, escriban una conclusión entre todos.

Profundiza

6. Reúnete con un compañero y efectúen las actividades.

a) En la tabla se han registrado los resultados de una encuesta a estudiantes de secundaria usuarios de internet, para conocer el principal dispositivo o medio con que acceden.

Dispositivo	Celular	PC en casa	*Laptop*	Tableta	Cibercafé	Rango	Desviación media
Hombres	23	45	21	17	12		
Mujeres	38	40	31	27	29		

Fuente: elaboración propia.

i. ¿En qué conjunto de datos (hombres o mujeres) el rango es mayor? ___________

ii. ¿En qué conjunto de datos (hombres o mujeres) la desviación media es mayor? ___________

iii. Al comparar las medidas de los rangos y las desviaciones, ¿qué interpretaciones pueden hacer al respecto? ___________

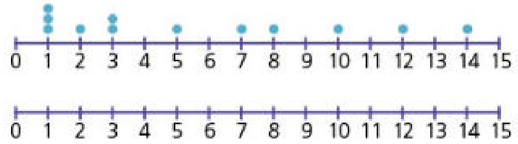
b) Se llevó a cabo un estudio para conocer la permanencia media de los pacientes en dos clínicas, con el fin de analizar la viabilidad de una posible ampliación en éstas. Se hizo el estudio sobre 12 pacientes en cada clínica. Completen la tabla con los datos que se piden.

Clínica A: 1, 14, 7, 12, 10, 8, 3, 1, 1, 2, 3, 5

Clínica B: 3, 5, 6, 8, 2, 1, 10, 4, 5, 3, 11, 1
Fuente: elaboración propia.

	Rango	Desviación media
Clínica A		
Clínica B		

c) Completen las gráficas.



i. Señalen, en cada gráfica, la localización del promedio.

ii. Expliquen, en su cuaderno, la interpretación gráfica del valor absoluto de la diferencia entre el valor de un dato y el valor del promedio.

iii. Den la interpretación gráfica de que, para uno de los conjuntos de datos, la desviación media es mayor.

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Discutan y argumenten sus respuestas del inciso c) y escriban una conclusión entre todos.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-211a. Efectúa las actividades sobre la desviación media y el rango; si tienes dudas, revisa las actividades de la lección.

Ingresa a www.redir.mx/matret3-211b. Efectúa las actividades. Comenta, con tus compañeros, qué medidas estadísticas conoces y las características de cada una.

Escribe dos conjuntos, cada uno con 12 datos, con el mismo rango y el mismo promedio, pero que no tengan la misma desviación media.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 41 en la bitácora de la página 213.

Lecciones 33 y 34

a) En una sucesión, cuando las diferencias de nivel 2 son una constante distinta de 0, la expresión algebraica general del término enésimo de la sucesión es de la forma ________________,

donde n representa ________________. El método para determinar los coeficientes a, b, c de esta expresión es el siguiente: ________________, que es igual a la constante de las diferencias de nivel 2.

La suma $3a + b$ es igual al ________________ término de las diferencias de nivel 1 y la suma $a + b + c$ es igual al ________________ término de la sucesión.

Se resuelven las ecuaciones y se sustituyen los valores en ________________________

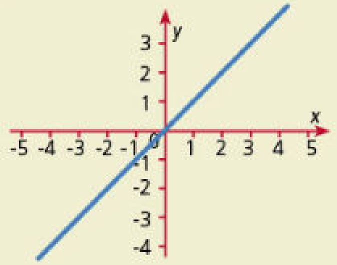
b) Determina la expresión general con la que se obtiene cada sucesión.

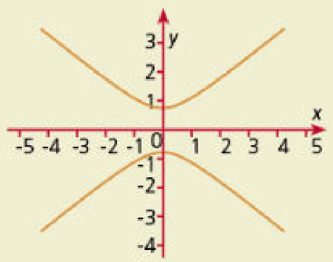
i. 2, 5, 10, 17, 26, …

ii. 2, 7, 16, 29, 46, …

Lecciones 35 y 36

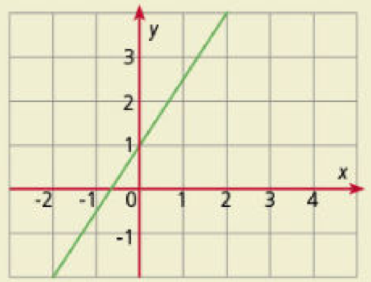
a) Determina las superficies que se forman al rotar las gráficas alrededor del eje y. Dibújalas en tu cuaderno.





Lección 37

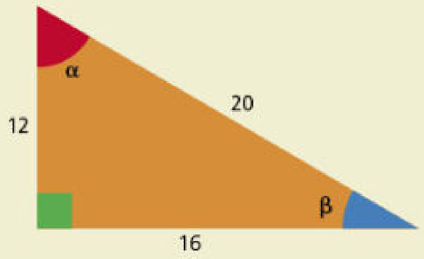
a) Calcula la pendiente de la recta que se muestra. Con base en ese valor, determina el ángulo que se forma con el eje de las abscisas.



Pendiente: ________________ Ángulo: ____________

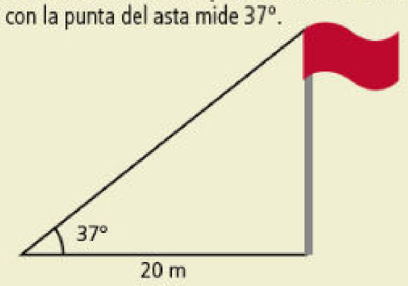
Lección 38

a) Determina el valor de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para los ángulos α y β. Determina el valor de los ángulos. Escríbelos en tu cuaderno.



Lección 39

a) Calcula la altura del asta bandera. Considera que, a cierta hora del día, el ángulo que forma el extremo de su sombra con la punta del asta mide 37°.



Altura del asta: ______

Lección 40

Una persona gasta \$1 260.00 en una semana; es decir, el lunes tiene esa cantidad y el domingo se termina el dinero. Suponiendo que gasta lo mismo cada día...

a) Grafica, en tu cuaderno, la recta que relaciona la cantidad de dinero restante (eje y) con la cantidad de días transcurridos (eje x).

b) Encuentra la razón de cambio entre la cantidad de dinero y los días transcurridos, con base en el dibujo.

c) Explica con tus palabras qué significa dicha razón de cambio.

Lección 41

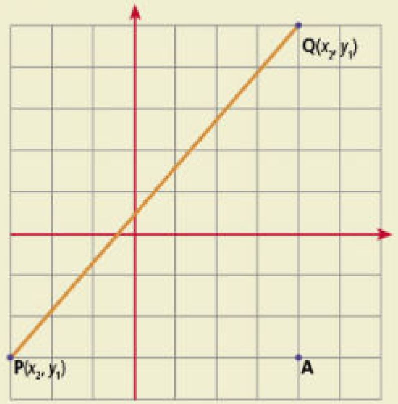
Haz equipo con seis compañeros. Recoge los datos de los meses en que nació cada uno (numerando los meses, por ejemplo; enero = 1, febrero = 2, etcétera).

a) Calcula el rango de los datos que recogiste. ________________

b) Calcula la desviación media de estos datos. ________________

c) Explica con tus palabras qué representan estos valores.

Pitágoras en el plano cartesiano



1. Lleva a cabo lo que se pide.

a) Determina las coordenadas de P y Q.

P ____________

Q ____________

b) Traza los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{PA}$. El triángulo que se forma es un triángulo ____________

c) ¿Cuánto mide cada segmento que trazaste y qué relación guardan estas medidas con las coordenadas de P y Q? ____________

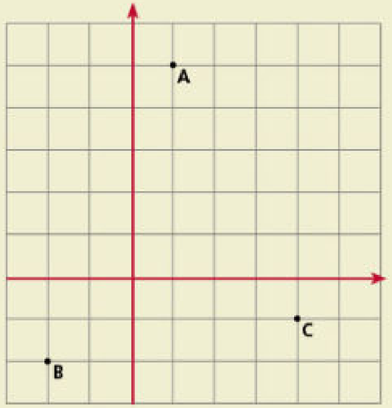
d) Usa el teorema de Pitágoras para determinar la medida del segmento $\overline{PQ}$. Explica tu procedimiento.

2. Reúnete con dos compañeros para reproducir el ejercicio anterior con dos puntos P y A de coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2). Respondan en el cuaderno.

a) En términos de las coordenadas de P y Q, ¿cuánto miden los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{QA}$?

b) Relaciona la medida de los lados $\overline{PA}$ y $\overline{QA}$ con el segmento $\overline{PQ}$.

c) Concluyan que la fórmula para calcular la distancia entre P y Q es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



3. Calcula la distancia entre los puntos de la figura.

a) Distancia entre A y B: ____________

b) Distancia entre A y C: ____________

c) Distancia entre B y C: ____________

Curiosidades de las sucesiones

A Vanesa le gusta profundizar en los temas que va estudiando en sus lecciones. Por ejemplo, al investigar más sobre sucesiones, encontró que en la sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1 215, ..., los términos siguientes no se obtienen sumando siempre determinada cantidad, como en la progresión aritmética, y que tampoco se encuentran regularidades al calcular las diferencias de los términos. ¿Cómo se determina una regla general para este tipo de sucesiones?

1. Responde las preguntas en el cuaderno.

a) En la sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1 215, ..., ¿qué número multiplicado por el primer término da como resultado el segundo?

b) ¿Qué número multiplicado por el segundo término da como resultado el tercero?

c) ¿Cuál es la regularidad que encuentran?

d) Calcula el cociente que resulta de dividir cada término de la sucesión entre el término inmediato anterior. ¿Cómo cambia la sucesión?

2. Dada la sucesión 2, 8, 32, 128, 512, ..., calcula el cociente entre cada término y el inmediato anterior.

a) Calcula los siguientes tres términos. ____________

b) ¿Puedes dar una fórmula para calcular cualquier término a partir del primero?

c) Lee la información. Discútela con un compañero y escriban una conclusión en el cuaderno. Si tienen dudas, anótenlas y coméntenlas con el profesor.

Una progresión geométrica es una secuencia ordenada de números cuyos términos se obtienen multiplicando el anterior por una cantidad fija llamada razón de la progresión (r). El término enésimo de una progresión geométrica es $a(n) = a(1)r^{n-1}$, donde $a(1)$ es el primer término.

d) Escribe los primeros cinco términos de la progresión geométrica que se inicia en 4 y cuya razón es 3.

e) Encuentra la fórmula para calcular el enésimo término de la sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1 215…

3. Considera las sucesiones: $3n^2$ y $3(2^{n-1})$.

a) Calcula los primeros ocho términos de cada sucesión. ____________

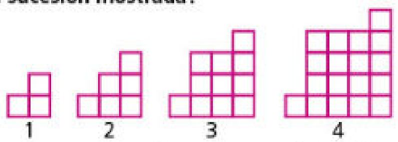
b) Traza, en el cuaderno, la gráfica de las dos sucesiones. Escribe tus conclusiones acerca de las características de las sucesiones y de sus gráficas.

Lee con atención los planteamientos, elige la respuesta correcta y márcala en la sección de respuestas.

1. ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 2013 de la sucesión mostrada?

a) 4 052 169 b) 4 052 171

c) 8 104 338 d) 8 104 340



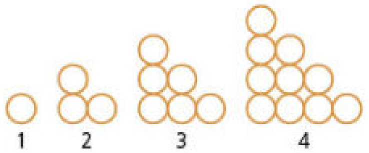
2. En la sucesión mostrada, ¿qué expresión algebraica corresponde al número de círculos de la figura n?

a) $\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+0$

b) $\frac{3n^2}{2}-\frac{5n}{2}+2$

c) $\frac{3n^2}{2}-\frac{7n}{2}+3$

b) $-\frac{n^2}{2}+\frac{11n}{2}-6$



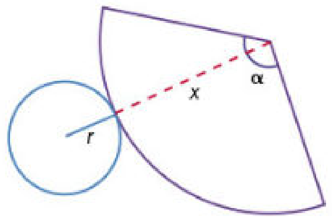
3. La imagen corresponde al desarrollo plano de un cono; el radio de la base del cono (r) mide 10 cm y el ángulo del sector circular (α), 120°. ¿Cuánto mide la generatriz del cono (x)? Considera $\pi = 3.14$.

a) 30 cm

b) 31.4 cm

c) 60 cm

d) 62.8 cm



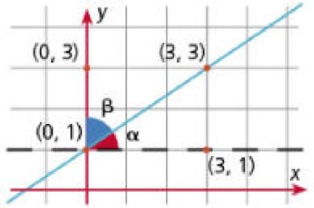
4. En la figura, ¿cuánto valen las tangentes de los ángulos α y β?

a) $\tan(\alpha)=\frac{2}{3}$; $\tan(\beta)=-\frac{3}{2}$

b) $\tan(\alpha)=\frac{2}{3}$; $\tan(\beta)=\frac{3}{2}$

c) $\tan(\alpha)=\frac{3}{2}$; $\tan(\beta)=-\frac{2}{3}$

d) $\tan(\alpha)=\frac{3}{2}$; $\tan(\beta)=\frac{2}{3}$



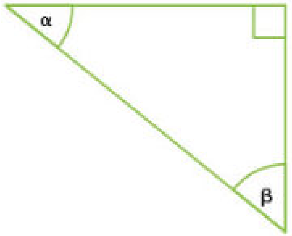
5. ¿Qué igualdad es verdadera respecto a los ángulos agudos de cualquier triángulo rectángulo?

a) $\text{sen}(\alpha) = \cos(90° - \beta)$

b) $\cos(\alpha) = \text{sen}(90° - \beta)$

c) $\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) = \text{sen}(\alpha + \beta)$

d) $\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$



6. Elisa viajará del poblado A al B, que está a 50 km de distancia; pero, como no hay una carretera directa, viajará por dos caminos perpendiculares, como se muestra en el diagrama. ¿Qué distancia recorrerá?

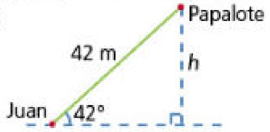
a) 61.7 km b) 70.3 km

c) 77.7 km d) 80.1 km

7. Juan está volando un papalote cuya cuerda, de 42 m de longitud, forma un ángulo de 42° con el plano horizontal. ¿Qué expresión corresponde a la altura (h) del papalote?

a) $h = 42(\cos 42°)$ b) $h = 42(\text{sen } 42°)$

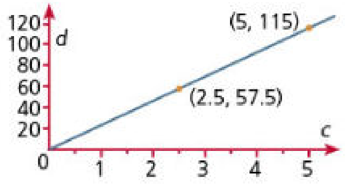
c) $h = 42(\cos 42° + \text{sen } 42°)$ d) $h = 42(\tan 42°)$



8. La gráfica de la derecha relaciona el consumo (c) de gasolina de una motocicleta con la distancia (d) que ésta recorre. ¿Qué razón de cambio corresponde al rendimiento de combustible del vehículo?

a) $\frac{115-5}{57.5-2.5}$ b) $\frac{57.5-2.5}{115-5}$

c) $\frac{115-57.5}{5-2.5}$ d) $\frac{5-2.5}{115-57.5}$



9. ¿Qué conjuntos, A y B, tienen el mismo promedio pero distinto rango?

a) A: [2, 2, 4, 6, 6] B: [2, 3, 3, 4, 6] b) A: [1, 3, 4, 5, 7] B: [1, 4, 4, 4, 7]

c) A: [2, 3, 4, 5, 6] B: [1, 3, 4, 5, 7] d) A: [2, 3, 3, 4, 6] B: [1, 4, 5, 5, 7]

10. La tabla muestra la cantidad de goles anotados por dos equipos de futbol durante los primeros cuatro partidos de la temporada. ¿Cuál es el rango de goles (R) y la desviación media (DM) de cada equipo?

a) X: R = 3, DM = 1; Y: R = 3, DM = 1

b) X: R = 2, DM = 1; Y: R = 2, DM = 1.5

c) X: R= 4, DM = 3; Y: R = 6, DM = 3

d) X: R = 1, DM = 0.5; Y: R = 1, DM = 1.5

Número de partido	1	2	3	4
Goles del equipo X	1	0	3	0
Goles del equipo Y	2	1	3	

Respuestas de la evaluación correspondiente al bloque 4.

1. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ 5. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ 9. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

2. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ 6. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ 10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

3. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ 7. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

4. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ 8. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Lee con cuidado la situación y responde lo que se pide. Justifica tus respuestas.

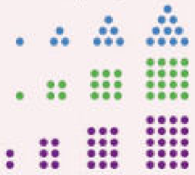
Los números poligonales

Los pitagóricos definieron los números primos, los números perfectos y los números poligonales (o figurados). Algunos ejemplos de números poligonales se muestran a continuación.

Números triangulares (T_n):

Números cuadrados (C_n):

Números rectangulares (R_n):



El orden de un número poligonal corresponde al número de figura: 6 es el número triangular de orden 3.

Pregunta 1. A partir de los datos anteriores, indica si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Un número cuadrado es igual a un número rectangular del mismo orden.
- Un número rectangular es el doble del número triangular del mismo orden.
- Un número triangular es la mitad del número rectangular del mismo orden.
- Al sumar un número cuadrado con su respectivo número de orden, resulta un número rectangular.
- Un número cuadrado es igual a un número triangular más el número de orden.
- Al sumar un número cuadrado más el número de orden, resulta un número rectangular.

Pregunta 2. Escribe una fórmula general para cada sucesión de números (triangular, cuadrado y rectangular) en función del orden (*n*). Justifica tus respuestas.

Sucesiones	T_n	C_n	R_n
Fórmula general			

La presión arterial

La presión arterial es la fuerza o presión que lleva la sangre a todas las partes del cuerpo humano. El resultado de la lectura de la presión arterial se da en dos cantidades, por ejemplo, 110/80; la primera de ellas es la sistólica y la segunda, diastólica.

La presión arterial sistólica (máxima) y la presión arterial diastólica (mínima) no son dos clases o formas distintas de presión arterial.[1]

Rango	Sistólica	Diastólica	Recomendación
Presión arterial demasiado baja	<100	<60	Consultar al médico
Presión arterial óptima	100-120	60-80	Autocontrol
Presión arterial normal	120-130	80-85	Autocontrol
Presión arterial ligeramente alta	130-140	85-90	Consultar al médico
Presión arterial muy alta	140-160	90-100	Solicitar ayuda médica
Presión arterial demasiado alta	160-180	100-110	Solicitar ayuda médica

La presión arterial varía de un momento a otro por muchos factores; por ejemplo, en un estudio sobre la presión arterial diastólica a un paciente, se obtuvieron los siguientes datos:

95, 90, 85, 90, 80, 75, 100, 75, 80, 80, 110, 105, 90, 80, 75, 80, 80, 80, 80, 80, 85, 80, 100, 90, 95.

[1]Tomado de Nieto Martínez, Elena, et al., "Detección de subformas de hipertensión arterial por monitorización ambulatoria de la presión arterial. Utilidad clínica. (Hospital General de Albacete)", Revista de Enfermería, 15, abril de 2002, disponible en www.uclm.es/ab/enfermeria/revista/numero%2015/numero15/dtecc_HTA.htm. (Consulta: 7 de noviembre de 2013).

Pregunta 1. Un médico analizó los datos anteriores y dijo: "Como el promedio está entre los límites normales, el rango de variación es menor a 35 y la desviación media se encuentra por debajo de 5.08, no existe ningún problema en el paciente sobre la presión arterial diastólica".
Proporciona argumentos matemáticos acerca de si el doctor tomó una decisión correcta.

Pregunta 2. Si fueras el doctor, ¿qué le recomendarías al paciente?

Rescate marino

Un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio desde su posición con un ángulo de depresión de 12°. Un buzo se baja 42 metros hasta el fondo del mar y, para llegar a los restos del naufragio, necesita desplazarse cierta distancia sobre la superficie del fondo del mar.

Pregunta 1. Representa la situación con un dibujo.

Pregunta 2. Calcula la distancia que requiere avanzar el buzo para llegar a los restos del naufragio.

Autoevaluación

Analiza tu desempeño en el bimestre y selecciona, en cada caso, la acción que mejor lo represente.

	Soy capaz de explicarlo a otros o ayudarlos.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Obtener la expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.				
Analizar las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo.				
Construir desarrollos planos de conos rectos.				
Construir desarrollos planos de cilindros rectos.				
Reconocer la relación que existe entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.				
Identificar y usar las razones trigonométricas que resultan de relacionar los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo.				
Calcular razones de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal.				
Identificar la pendiente de la recta que representa un proceso o fenómeno.				
Reconocer y calcular el rango y la desviación media para medir la dispersión de un conjunto de datos.				

Comenta con el profesor tus avances y dificultades.

Bloque 5

Aceleradores de partículas

Los avances en medicina, electrónica, exploración espacial o el desarrollo de microscopios cada vez más potentes se deben al conocimiento obtenido acerca del comportamiento de las partículas. Como ejemplo tenemos el acelerador de partículas, un dispositivo a gran escala que utiliza campos electromagnéticos para que las partículas alcancen velocidades muy altas y choquen unas contra otras. Con estos dispositivos se estudia la estructura de los átomos y, además, se modelan y comprueban diversos fenómenos y teorías físicas. En este campo de estudio, las matemáticas ayudan a responder varias preguntas: ¿cuál es el diseño adecuado de un acelerador de partículas?, ¿cómo debe calibrarse para efectuar un experimento en particular?, ¿cuál es la trayectoria esperada de una partícula?, ¿qué partículas se obtienen después de una colisión?
Investiga sobre el gran colisionador de hadrones de la Organización Europea para la Investigación Nuclear.

Aprendizajes esperados

1. Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
2. Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
3. Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
4. Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

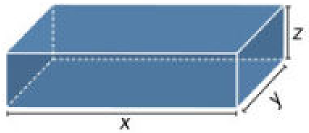
Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: patrones y ecuaciones

Contenido

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada

La alberca

A una arquitecta le han encargado remodelar una alberca. Para ello, necesita desaguarla. Para evitar que se formen grietas en las paredes, ha decidido desaguar primero la cuarta parte de la cantidad de agua; luego la mitad del resto y con ello, quedarán por desaguar 45 000 l de agua.



1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica. Expliquen sus respuestas y procedimientos en el cuaderno.

a) Si se representa con x la capacidad de la alberca, escriban una expresión algebraica para cada afirmación.

Un cuarto del contenido: La mitad del resto:
Quedan aún 45 000 litros. Ecuación:

b) Resuelvan la ecuación y determinen cuál es la capacidad de la alberca.

c) Si la profundidad de la alberca es de 2 m y el largo es 50 cm mayor que el ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?

d) Si la profundidad de la alberca es de 1.2 m y su largo es igual que su ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la alberca?

e) Señalen otras dos posibles dimensiones de la alberca.

f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Si hay resultados diferentes, consulten a su profesor y corríjanlos. Comenten si usaron alguna ecuación para responder qué tipo de ecuación fue y cómo la resolvieron.

Un paso adelante

2. Trabaja con un compañero. Analicen los planteamientos y respondan.

a) Dos personas cargan varios sacos de harina. La más joven se queja continuamente y la otra le dice: "Ya no te quejes. Si yo te diera uno de los sacos que llevo, entonces ambos llevaríamos el mismo número de sacos; si tú me dieras uno, entonces yo llevaría el doble de sacos que tú".

i. Representen con sendas literales el número de sacos que lleva cada persona. Escriban una ecuación que modele al enunciado: "Si yo te diera uno de los sacos que llevo, entonces ambos llevaríamos el mismo número de sacos". ______

ii. Escriban otra ecuación que modele la parte del enunciado: "Si tú me dieras uno, entonces yo llevaría el doble de sacos que tú". ______

iii. Resuelvan en su cuaderno el sistema de ecuaciones e indiquen el número de sacos que lleva cada quien.

Número de sacos que lleva la persona más joven: ______

Número de sacos que lleva la otra persona: ______

b) En una tienda de mascotas hay tres peceras: una pequeña, una mediana y otra grande. En total hay 56 peces en las peceras. En la mediana hay el doble de peces que en la chica; en la pecera grande hay el doble de peces que en la mediana. Si x representa el número de peces que hay en la pecera chica…

i. Escriban una ecuación que modele el enunciado del problema. ______

ii. Resuelvan la ecuación.

iii. Indiquen el número de peces que hay…

En la pecera chica: ______ En la pecera mediana: ______ En la pecera grande: ______

c) Al señor Bernabé le solicitaron hacer un molde metálico cuya forma debe ser un prisma cuadrangular y que tenga 2 000 pulgadas cúbicas de volumen. Él usará una lámina cuadrada, así que quiere calcular las dimensiones de ésta para armar el molde.

i. El señor Bernabé sabe que hay que cortar un cuadrado de 5 pulgadas de lado en cada esquina de la lámina cuadrada y después doblar las partes restantes para formar el molde. Observen las figuras.

ii. Expliquen por qué la base del molde que se forma es un cuadrado. ______

iii. Si x representa la medida del lado de la lámina cuadrada y se corta un cuadrado de 5 pulgadas, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el lado de la base del molde? ______

iv. Escriban una ecuación que relacione el área de la base del molde con su altura y determinen las medidas del molde armado. ______

v. Expliquen cómo se verifica que su respuesta cumpla las condiciones solicitadas. ______

vi. Si le piden otro molde al señor Bernabé para una caja del mismo volumen, pero ahora la lámina debe ser rectangular, de tal manera que su largo sea 10 pulgadas mayor que el ancho y el área de la base del molde sea de 200 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son las medidas del molde armado? Justifiquen la respuesta en su cuaderno. ______

3. Comparen respuestas y procedimientos con los de otro equipo. Discutan cómo resolvieron las ecuaciones que plantearon y cómo verificaron los resultados.

Profundiza

4. Reúnete con dos compañeros. Analicen cada situación y efectúen lo que se indica.

a) La tercera parte de las cucharas de una casa está en el lavaplatos; la mitad, en un cajón, y el resto, en la mesa. Si en la mesa hay seis cucharas, ¿cuántas cucharas hay en total? Planteen las ecuaciones que modelan el problema y resuélvanlas.

Ecuación

Solución

b) A una estudiante de tercero de secundaria le dejaron de tarea plantear una ecuación y un sistema de ecuaciones a partir del enunciado de dos problemas. Revisen lo que hizo.

Ecuación	Sistema de ecuaciones
$960t = 576t + 576$	$0.1x + 0.2y = 4$ $0.2x + 0.5y = 9$
Un avión que vuela a 960 km/h debe alcanzar a otro avión que salió una hora antes y vuela a 576 km/h. ¿Cuánto tardará el primer avión en alcanzar al segundo?	De la mina A se extrae 1% de aluminio y 2% de cobre por cada tonelada de mineral, mientras que de la mina B se extrae 2% de aluminio y 5% de cobre por cada tonelada de mineral. ¿Qué cantidad de mineral se deberá extraer de cada mina para obtener 4 toneladas de aluminio y 9 toneladas de cobre?

c) Indiquen si las ecuaciones y el sistema de ecuaciones planteados son correctos. Corrijan los errores.

d) Resuelvan las ecuaciones y verifiquen las soluciones.

i. ¿Cuánto tardará el primer avión en alcanzar al segundo? ____________________

ii. ¿Qué cantidad de mineral se deberá extraer de cada mina para obtener 4 toneladas de aluminio y 9 toneladas de cobre? ____________________

e) Con las mismas ecuaciones, propongan un problema que se resuelva en cada caso.

i. Problema 1: ____________________

ii. Problema 2: ____________________

f) Reúnanse con otro equipo para comparar respuestas y problemas. Verifiquen que los problemas se resuelvan con las ecuaciones planteadas. En caso de que eso no ocurra, corrijan el problema. Luego, escriban una conclusión sobre esta actividad.

5. Plantea en tu cuaderno un problema que se resuelva con cada ecuación.

a) $4x + 3 = 2x + 17$

b) $3x + 2y = 44$

c) $4(x - 8)(x - 8) = 576$

d) $2x + y = 26$

6. Plantea la ecuación o ecuaciones que modelan cada problema y resuélvelas.

a) Calcula las medidas del largo (x) y ancho (y) de un jardín. Se sabe que el área no varía si x aumenta 5 m y y disminuye 2 m; pero si x disminuye 5 m y y aumenta 4 m el área (xy), aumenta en 10 m^2.

Planteamiento y resolución

b) Una distribuidora de carne empaca carne molida de primera calidad y de segunda calidad. En un paquete de primera calidad se revuelven 2 kg de grasa y 18 kg de carne maciza; en un paquete de segunda calidad se revuelven 3 kg de grasa y 17 kg de carne maciza. El encargado de la carnicería cuenta con 16 kg de grasa y 124 kg de carne maciza para empaquetar. ¿Cuántos paquetes de carne molida de primera calidad y de segunda calidad se pueden producir utilizando toda la carne y toda la grasa sin desperdiciar nada?

Planteamiento y resolución

c) Compara tus respuestas con las de tus compañeros, discutan los procedimientos que siguieron para verificar que sus planteamientos y soluciones sean correctos. En cada caso indiquen qué representan las literales que usaron en las ecuaciones. En caso de dudas o desacuerdos, con la guía de su profesor lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-225a. Resuelve los reactivos 16, 31, 44, 45 y 46 de tercero de secundaria, Matemáticas. Lee las retroalimentaciones de todas las opciones de respuesta. Si tienes dudas, consulta las conclusiones que escribieron en esta lección.

Entra en www.redir.mx/matret3-225b. Encontrarás información sobre el lenguaje algebraico, los monomios y las ecuaciones. Escribe un resumen en tu cuaderno y comenta tus dudas con un compañero y con tu profesor.

Jorge compra en un supermercado 6 kg de tomate y 3 kg de huevo, por lo que paga \$384.00. Vuelve al día siguiente y compra 10 kg de tomate y 5 kg de huevo, por lo que paga \$640.00. ¿Cuál fue el precio por kilogramo de cada artículo?

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 42 en la bitácora de la página 262.

Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: patrones y ecuaciones

Contenido

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada

La venta de cosméticos

Julián se dedica a vender cosméticos por catálogo. En uno de los productos que vende obtiene una ganancia de 35%. Por un segundo producto, obtiene 32% de ganancia. En este mes hizo una inversión total en los dos productos de $5 000.00 y las ganancias de la primera inversión superan en $276.00 a las de la segunda.

1. Reúnete con dos compañeros y contesten lo que se pide.

a) Si se representa con la literal x la cantidad invertida en el primer producto y con la literal y la cantidad invertida en el segundo producto, ¿cómo se representa algebraicamente la ganancia de cada producto? ______________________

b) ¿Cómo se representa algebraicamente el enunciado: "Las ganancias de la primera inversión superan en $276.00 a las de la segunda"? ______________________

c) Escriban las ecuaciones que modelan el problema y resuélvanlas.

d) ¿Cuál fue la ganancia total por la inversión de Julián? ______________________

e) ¿Qué cantidad se invirtió en cada producto? ______________________

f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten cómo se representa 35% de una cantidad desconocida. Luego, con la ayuda de su profesor respondan.

i. ¿Cómo se representa 35% con una fracción? ______________

ii. ¿Cómo se escribe 30% como número decimal? ______________

iii. ¿Qué representación les parece más adecuada para resolver el problema? ______________

iv. ¿Qué significa $0.35x$ y $0.32y$ en el contexto del problema? ______________________

____

v. ¿Cómo se expresa algebraicamente el enunciado: "La cantidad invertida en el primer producto más la cantidad invertida en el segundo producto es igual a $5 000.00"? ______________

____

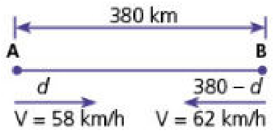
vi. Escriban sus conclusiones respecto a la resolución de ecuaciones o de sistemas de ecuaciones cuyos coeficientes sean fracciones decimales o números decimales. ______________

____

Un paso adelante

2. Reúnete con un compañero, analicen el problema y respondan. Justifiquen en su cuaderno.

a) La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 380 km. Un coche sale de A hacia B a 58 km/h de velocidad promedio. Al mismo tiempo, sale otro coche de B hacia A a 62 km/h de velocidad promedio. Guíense por el dibujo.



b) Si los dos coches se desplazan a velocidad constante, planteen, en su cuaderno, un sistema de ecuaciones que relacione los datos del problema para calcular el tiempo que tardan en encontrarse y la distancia que ha recorrido cada uno hasta el momento del encuentro. Expliquen el procedimiento que siguieron.

c) ¿En cuánto tiempo se encuentran los dos coches? ______________

d) ¿Qué distancia recorrió cada uno al momento del encuentro? ______________

e) ¿Cuánto tiempo tarda el automóvil A en llegar a la ciudad B? ______________

f) ¿Cuánto tiempo tarda el automóvil B en llegar a la ciudad A? ______________

g) Reúnanse con otra pareja de compañeros para comparar sus respuestas. ¿Establecieron el mismo sistema de ecuaciones? Si las respuestas no coinciden, verifiquen sus procedimientos. Pidan ayuda al profesor para aclarar sus dudas y dificultades.

3. Trabaja con un compañero, analicen el planteamiento y efectúen lo que se indica. Expliquen sus procedimientos en el cuaderno.

a) En el lanzamiento de un móvil, la velocidad inicial es 120 pies/s. Y la única fuerza que actúa, luego del impulso inicial, es la gravedad. En estas condiciones, la altura del móvil sobre el piso, h (en pies), al haber transcurrido t segundos, está expresada por $h = -16t^2 + 120t$.

En la tabla se presentan algunos valores de h para los primeros siete segundos de vuelo.

Tiempo t (en segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7
Altura h (pies)	0	104	176	216	224	200	144	56

Se observa que el móvil, al ascender, llega a una altura de 180 pies entre el tiempo $t = 2$ y $t = 3$. Al descender, está a 180 pies sobre el piso entre los tiempos $t = 5$ y $t = 6$. Escriban la ecuación que sirve para calcular los valores exactos de t, cuando la altura es de 180 pies.

____

b) ¿Para qué valores de t la altura que alcanza el móvil es igual a 180 pies?

t_1 = ______________ t_2 = ______________

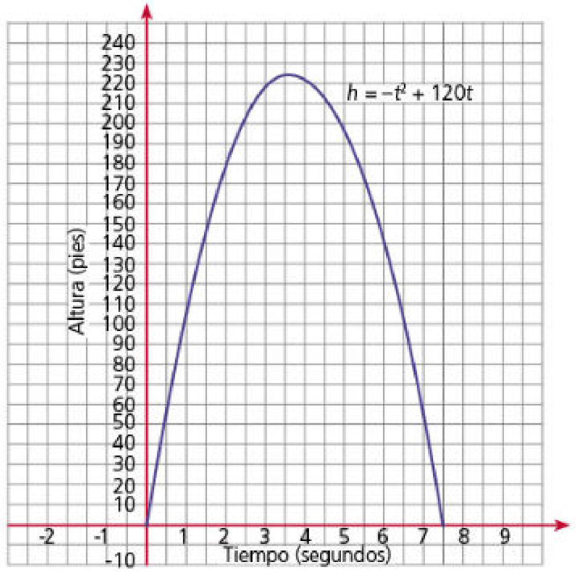
c) ¿Cuál es la ecuación que permite calcular el tiempo que tarda en tocar el piso? ____________

d) ¿Cuánto tiempo tarda el móvil en tocar el piso? ____________________________

e) La altura máxima que alcanza es de 225 pies. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar esa altura? ____

____

f) Verifiquen sus respuestas con la información de la gráfica.



g) Con ayuda de su profesor, discutan sobre la manera en que resolvieron el problema anterior. Registren sus conclusiones en el cuaderno.

Profundiza

4. Reúnete con dos compañeros, analicen lo que se presenta, y respondan lo que se pide.

a) Se soltó un objeto en caída libre y se registraron algunos datos en la tabla.

Distancia de la caída (m)	Tiempo (s)
0	0
10	1
40	2
90	3
160	4

i. Los datos de la tabla corresponden a los puntos.

(0, 0), (10, 1), (____ , ____), (____ , ____), (____ , ____)

ii. Ubiquen los puntos en un plano cartesiano en su cuaderno y tracen la curva que pasa por ellos.

b) La expresión algebraica asociada a la distancia recorrida por el objeto en caída libre, en función del tiempo, es de la forma $y = at^2 + bt + c$. Hagan lo que se indica para determinar los valores de los coeficientes *a*, *b* y *c* de la ecuación.

i. Al tiempo $t = 0$ el objeto ha recorrido 0 m.

Entonces $0 = a($ ____ $) + b($ ____ $) + c$ Por lo que $c =$ ________

ii. Para $t = 1$, el objeto ha recorrido ______ m.

Entonces ____ $= a($ ____ $) + b($ ____ $) +$ ____ Por lo que se obtiene la ecuación ____

iii. Para $t = 2$, el objeto ha recorrido ______ m.

Entonces ____ $= a($ ____ $) + b($ ____ $) +$ ____ Por lo que se obtiene la ecuación ____

iv. Resuelvan en su cuaderno el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los incisos ii y iii.

$a =$ ________________ $b =$ ________________

v. Escriban la ecuación que modela el problema. ____________________

vi. Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Comenten cómo resolvieron el sistema de ecuaciones lineales para calcular los valores de *a* y *b*. Comparen las ecuaciones que obtuvieron y comenten cómo verificarían que sean correctas. En caso de duda, coméntelas con su profesor.

5. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica en cada caso.

a) Propongan un problema que se pueda resolver con el sistema de ecuaciones.

$$2x + y = 19 \qquad x = 2y + 2$$

b) Factoricen el lado izquierdo de la ecuación $x^2 + 3x = 70$. Propongan un problema que se pueda resolver con esa ecuación cuadrática.

c) Presenten sus propuestas ante el grupo e intercambien puntos de vista, guiados por el profesor. Después, registren sus conclusiones y la situación que más les haya gustado.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-229a. Haz dic en "Planteamiento de problemas diversos". Explica en el cuaderno, los procedimientos de solución planteados y coméntalos con tus compañeros.

Explora www.redir.mx/matret3-229b. Lee la información y efectúa las actividades. Elabora un resumen sobre la resolución de ecuaciones y preséntalo a tus compañeros.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 43 en la bitácora de la página 262.

Una compañía papelera vende a una tienda escolar dos tipos de cuadernos. El precio del primero es de 0.5 dólares y el del segundo es de 0.7 dólares. La compañía recibe un pedido de 500 cuadernos y un cheque por 286 dólares. ¿Qué se pidió?

Eje: forma, espacio y medida
Tema: medida

Contenido

Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

De diferentes maneras

1. Trabaja con un compañero. Analicen la situación y efectúen lo que se indica. Justifiquen sus respuestas en el cuaderno.

a) Rosario y Armando discuten acerca de las maneras en que se puede generar un cilindro —un *sólido de revolución*—. Armando afirma que hay una sola: la rotación de un triángulo rectángulo sobre un eje. Rosario dice que también se puede generar al cortar muchos círculos del mismo diámetro, de tal manera que al apilarlos se forme un cilindro, por ejemplo, al *apilar tortillas*.

i. ¿Están de acuerdo con lo que afirma Armando? ¿Qué opinan de la postura de Rosario?

ii. ¿Qué entienden por "traslación de un círculo en dirección perpendicular al plano que lo contiene"?

b) Expliquen, con sus palabras, cómo se genera un cilindro mediante los movimientos que se indican.

Rotación	Traslación

c) ¿Qué formas tendrían las caras de los cuerpos que resultaran de hacer cortes paralelos a las bases en un cilindro de plastilina? ______________________________

____

d) Para generar una representación de un cono, Rosario propuso usar monedas o fichas de tamaños diferentes. Expliquen cómo se haría. Hagan un bosquejo o un esquema del cuerpo que se genera.

e) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Describan las características de las fichas o monedas con que se puede formar un cilindro recto. Registren sus acuerdos en el cuaderno.

Oriéntate

El cilindro recto se obtiene al girar un rectángulo sobre uno de sus lados, que se mantiene fijo.

2. Haz, en casa, lo que se indica.

a) Pide ayuda a un adulto para seleccionar vegetales y frutas de forma cilíndrica o cónica —como zanahorias, pepinos, peras—, así como objetos —un rollo de guayaba o el tubo de cartón de un rollo de papel— y hacerles diversos cortes. Determina la forma de las caras que resultan. Anota tus observaciones en el cuaderno. Lleva a la siguiente clase varios cilindros y conos de plastilina.

Un paso adelante

3. Trabaja con un compañero. Efectúen lo que se indica, justifiquen en su cuaderno.

a) Comenten sus observaciones respecto a la tarea de hacer distintos cortes en los vegetales, las frutas y los objetos que identificaron en casa, después contesten.

i. Si se hace un corte paralelo a la base de un cilindro, ¿qué características tendrán las caras de los cuerpos que se obtienen? Expliquen.

ii. ¿Y si se efectúa un corte oblicuo?

iii. ¿Con qué tipo de corte se logra que alguna de las caras de los cuerpos obtenidos sea un rectángulo?

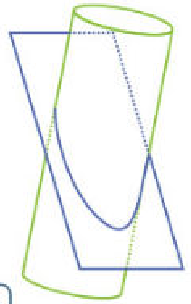
iv. Si se hace un corte perpendicular a la base de un cono, ¿qué características tendrán las caras de los cuerpos que se obtienen? Expliquen.

v. ¿Y si se efectúa un corte oblicuo?

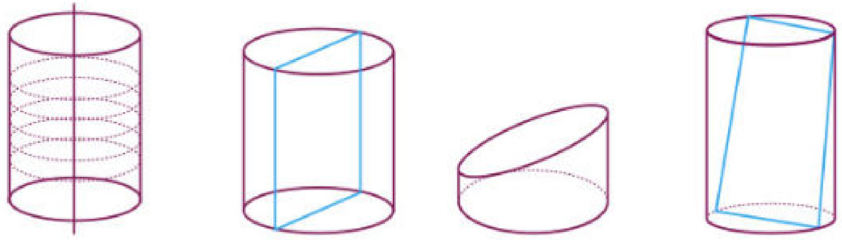
b) Formen cuatro cilindros de plastilina, en uno de ellos hagan un corte como el de la figura que se muestra a la derecha. Después contesten.

i. Describan la forma que queda en la base sobre la que se hizo el corte.

ii. Hagan varios cortes similares pero con diferente inclinación. ¿Cambia la forma de la base sobre la que se hizo el corte?



c) Reúnanse con otra pareja. Comparen sus respuestas y analicen los cortes que pueden hacerse en un cilindro.



A — Paralelo a la base
B — Perpendicular a la base
C — Oblicuo a la base (1)
D — Oblicuo a la base (2)

i. Hagan los cortes como se indica en varios cilindros de plastilina. Registren, en el cuaderno, los resultados.

Oriéntate

Recuerda que un corte oblicuo refiere a la posición intermedia entre paralela y perpendicular; por ejemplo, la letra *V* está formada por dos trazos oblicuos.

Profundiza

4. Reúnete con dos compañeros y efectúen lo que se pide.

a) Hagan una tabla como la siguiente en su cuaderno. Complétenla con base en sus registros y observaciones de la actividad anterior.

Corte	A	B	C	D
Forma de la cara de los cuerpos generados				
Otras características				

i. ¿Qué forma tienen las caras de los cuerpos al hacer el corte paralelo a la base si éste se hace exactamente por la mitad del cilindro? ____________________

____

ii. ¿Y si el corte se hace más cerca de una de las caras? Expliquen. ____________________

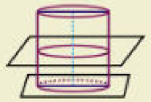
____

f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Entre todos aclaren las dudas y, en caso de haber diferencias, consulten con su profesor y corrijan lo necesario.

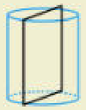
5. En grupo, analicen y discutan la información.

Al hacer un corte recto (o con un plano) sobre un cilindro recto, la cara sobre la que se hace el corte tiene formas particulares.

1. Paralelo a la base: dos caras de los cuerpos obtenidos son círculos.



2. Perpendicular a la base: una cara de cada uno de los cuerpos es un rectángulo.



3. Oblicuo: una cara de los cuerpos obtenidos tiene forma de óvalo (en particular una elipse).

6. Reúnete con un compañero y hagan lo que se indica.

a) El cono recto es un cuerpo que puede obtenerse al girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos. Si se hace un corte horizontal a un cono, ¿qué forma tendrán las caras de los cuerpos que se generan? Explíquenlo. ____________________

____

i. ¿Y si el corte fuera vertical? Explíquenlo. ____________________

____

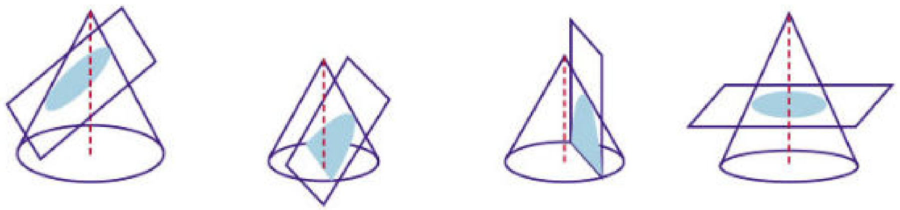
b) Usen conos de plastilina o de unicel, hagan los cortes que se indican.

A
Oblicuo a la base

B
Paralelo a la generatriz

C
Perpendicular a la base

D
Paralelo a la base



c) En su cuaderno, elaboren una tabla de datos similar a la de la actividad 4. Describan las características de las caras de los cuerpos que se obtienen al hacer los distintos cortes.

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Entre todos aclaren las dudas y, en caso de haber diferencias, consulten con su profesor y corrijan lo necesario.

7. En grupo, analicen y discutan la información.

Al hacer un corte recto (o con un plano) en un cono, se obtienen curvas o partes de curvas llamadas *cónicas*. Las curvas que se obtienen son las siguientes.

Corte paralelo a la base

Círculo

Corte oblicuo a la base

Elipse

Paralelo a una de las generatrices del cono

Parábola

Perpendicular a la base

Hipérbola

a) Discutan la información, comenten sus dudas para solucionarlas. Después, con la ayuda de su profesor, redacten sus conclusiones acerca de las características de las secciones que se obtienen al hacer cortes en un cilindro y en un cono recto.

TIC

Entra a www.redir.mx/matret3-233a. Haz clic en "Los sólidos de revolución". Describe en el cuaderno las características de los cuerpos geométricos que se mencionan.

Entra a www.redir.mx/matret3-233b. Explora los interactivos. Comenta, con tus compañeros, tu experiencia y qué dificultades afrontaron.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 44 en la bitácora de la página 262.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: medida

Contenido

Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

El taller

Un diseñador debe armar diversas estructuras cónicas. Al colocar la primera, se dio cuenta de que la altura de los conos que había encargado no era la adecuada; así que llamó al taller para pedir que la cambiaran, pero le dijeron que ya habían elaborado al menos otras dos estructuras con esas medidas. El diseñador pidió que recortaran los conos de forma que el radio de la base se redujera a la mitad. En el taller, uno de los responsables opinó que debían recortar el cono a la mitad de la altura, pero otro dijo que con ese corte el radio disminuiría más de lo solicitado.

1. Trabaja con un compañero. Analicen la situación y respondan lo que se pide.

a) ¿Qué opinan de las afirmaciones de los responsables del taller? ______________________

____

b) Subrayen el tipo de relación que se establece entre la altura de un cono y la medida del radio de su base al hacer diversos cortes paralelos a ésta.

i. Proporcional ii. Cuadrática iii. Lineal

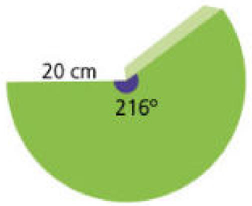
c) Justifiquen su selección. ______________________

____

d) Si a un cono recto de 20 cm de altura cuya base mide 15 cm de radio se le hace un corte paralelo a la base de manera que la altura del nuevo cono sea de 16 cm, ¿cuál será la medida del radio de la nueva base? Expliquen su procedimiento. ______________________

____

____



e) Analicen el desarrollo plano que se muestra. Indiquen la medida de la altura y del radio de la base del cono que se obtiene. Expliquen en su cuaderno cómo los obtuvieron.

Altura ____________ Radio de la base ____________

f) Tracen varias copias del desarrollo plano en una cartulina y armen los conos. Hagan los cortes que se indican en la tabla y registren los radios de la base en cada caso.

Altura del cono que se obtiene al hacer un corte paralelo a su base (cm)	Medida del radio de la base (cm)
10	
8	
5	
4	
2	

g) Discutan las respuestas con sus compañeros. Comparen los datos registrados en la tabla y justifiquen cómo los obtuvieron. Si hay discrepancias, soliciten la intervención del profesor para llegar a acuerdos. Repitan la actividad en caso de ser necesario.

Un paso adelante

2. Trabaja con un compañero. Respondan lo que se pide con base en los datos de la tabla de la actividad anterior.

a) Si se hace un corte a la mitad de la altura del cono, ¿la medida del radio disminuye también a la mitad? Justifiquen su respuesta. ______________________

____

b) ¿Cómo es la medida del radio luego de cortar el cono a la cuarta parte de su altura? ____________

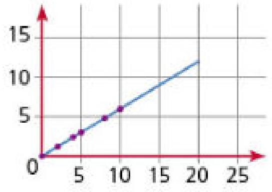
____

c) Con base en la tabla, ¿pueden determinar el tipo de relación que existe entre la medida del radio y la altura del cono? Explíquenlo. ______________________

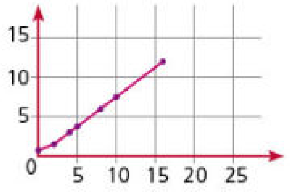
____

d) Analicen las gráficas y expliquen cuál corresponde a los datos de la tabla.

Gráfica 1

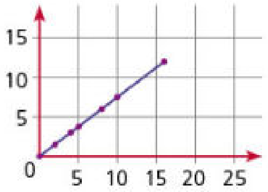


Gráfica 2



Gráfica 3

Gráfica 4



e) Justifiquen por qué las tres gráficas restantes no corresponden a la tabla.

i. Gráfica ____: ______________________

ii. Gráfica ____: ______________________

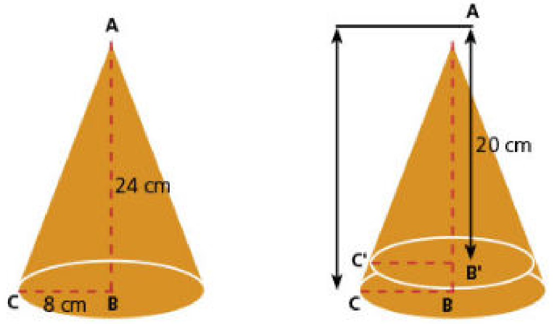
iii. Gráfica ____: ______________________

f) Discutan sus respuestas con sus compañeros. Indiquen si, a partir de la gráfica, se identifica el tipo de relación que hay entre la altura y el radio de la base del cono.

Profundiza

3. Reúnete con dos o tres compañeros. Hagan lo que se indica.

a) El cono recto se generó al girar el triángulo rectángulo **ABC** sobre el cateto $\overline{AB}$. En la segunda imagen se muestra cómo se hizo un corte paralelo a la base, a 4 cm de ésta.



i. Justifiquen, en su cuaderno, por qué ΔABC y ΔAB′C′ son semejantes.

ii. ¿Cuánto mide el radio x (lado $\overline{B'C'}$)? ________ Expliquen cómo lo determinaron. ____________

____

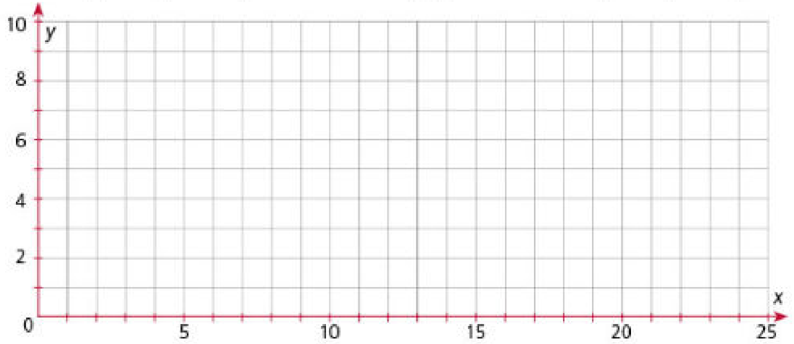
iii. Si se hace el corte a 10 cm de la base, ¿cuánto mide ahora el radio de la base? ____________

iv. Si se hace un corte sobre el cono y el radio de la nueva base mide 2 cm, ¿a qué altura se hizo el corte? ______________________

v. Completen la tabla con las alturas y los radios de la base al hacer diversos cortes en el cono.

Altura (cm)	24	20	15	10	5
Medida del radio (cm)	8				

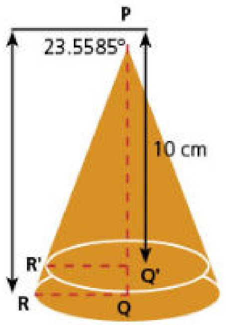
vi. Tracen la gráfica que corresponde a la tabla. Agreguen el título a la gráfica y a los ejes.



b) Comparen respuestas con las de sus compañeros. Verifiquen las gráficas que trazaron. Escriban un procedimiento para calcular la altura de uno de los conos si se conoce el radio de la base.

4. Resuelve los problemas.

a) Analiza las medidas en este cono. Se hizo un corte a 2 cm de su base.



b) El cono fue generado por medio del triángulo rectángulo **PQR**. Los triángulos ΔPQR y ΔPQ′R′ son semejantes; además, se conoce la medida de uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.

i. ¿Con qué razón trigonométrica se puede determinar la medida del radio (x) de la base de los dos conos? ______________________

ii. Explica el procedimiento para hacerlo. ______________________________

____

c) Obtén las medidas del radio de la base de los conos que resultan al hacer varios cortes paralelos a la base del que se muestra.

Altura (cm)	10	8	6	4	2
Medida del radio (cm)					

d) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten los procedimientos que siguieron para determinar la medida del radio de la base de los conos. Comenten sus experiencias en clase y expliquen cómo se obtendrían las medidas de los radios de los círculos que resultan al hacer cortes paralelos a la base de un cono recto. Anótenlos en su cuaderno, léanlos ante el grupo y verifiquen que sean claros y adecuados.

TIC

Entra a www.redir.mx/matret3-237a. Haz clic en "Cilindros y conos". Analiza las situaciones planteadas. Si tienes dudas, coméntalas con un compañero y revisen la lección.

Entra a www.redir.mx/matret3-237b. Modifica los parámetros del cono interactivo y observa cómo cambian su área y volumen. Comenta tus conclusiones con el grupo.

Un cono se genera al dar vuelta a un triángulo rectángulo por su lado mayor. La hipotenusa del triángulo mide 6 cm y uno de sus ángulos mide 40°. A partir del cono que se genera se corta un cono A de 2 cm de altura. Determina la altura y el radio de la base del cono A.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 45 en la bitácora de la página 262.

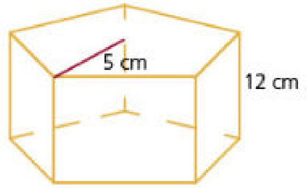
Eje: forma, espacio y medida
Tema: medida

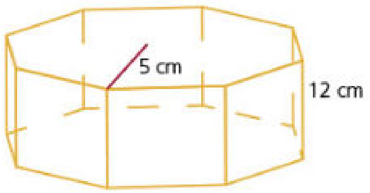
Contenido

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

Recipientes

Lupita trabaja en mercadotecnia para una empresa que elabora edulcorantes. Su jefa ha solicitado ideas para la campaña publicitaria del siguiente mes, ya que presentarán un producto nuevo. Lupita propuso ofrecer el producto en frascos o tarros con diferentes formas de prismas regulares, en lugar del envase cilíndrico clásico. Planteó que usaran dos tipos de envase y presentó el dibujo de sus propuestas.





1. Trabaja con un compañero. Analicen las imágenes y discutan lo que se propone.

a) ¿Cuáles son las características de los envases que presentó Lupita? ______

b) ¿Cómo se calcula el volumen de estos envases? ______

c) ¿Qué envase tiene el mayor volumen? Justifiquen su respuesta. ______

d) Tracen en el cuaderno una circunferencia de 5 cm de radio e inscriban en ella un triángulo equilátero. Respondan las preguntas.

i. Expliquen el procedimiento que siguieron para trazar el triángulo. ______

ii. ¿Cuánto miden los lados del triángulo inscrito en la circunferencia? ______ ¿Cuánto mide la altura del triángulo? ______

iii. Expliquen cómo lo determinaron. ______

iv. Determinen el volumen de un envase en forma de prisma triangular cuya base sea el triángulo que trazaron y la altura sea de 12 cm. Volumen: ______

v. La base de un frasco cilíndrico usado en la empresa tiene 5 cm de radio y 942.48 cm^3 de volumen. Comparen el volumen del prisma triangular y del cilindro. ¿Cuál es el mayor? ______

e) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y, con ayuda de su profesor, verifiquen que sean correctas. Indiquen si el volumen del cilindro es mayor o menor que el de los prismas y justifíquenlo.

Un paso adelante

2. Trabaja con un compañero. Retomen los datos de la actividad anterior.

a) Calculen el volumen de los prismas rectos que se indican en la tabla. El polígono regular de la base de cada prisma está inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio y su altura es de 12 cm.

Prisma de base	Medida del lado (cm)	Medida del apotema (cm)	Área de la base (cm^2)	Volumen (cm^3)
pentagonal				
hexagonal				
heptagonal				
octagonal				
decagonal				
undecagonal				
16 lados				
18 lados				
22 lados				

b) Indiquen por qué, al aumentar el número de lados de la base de cada polígono, también aumenta el volumen. ______

c) ¿Qué prisma tiene volumen más parecido al del cilindro? Expliquen. ______

i. ¿Cómo se obtiene el área de la base de cualquier polígono? Describan su procedimiento. ______

ii. ¿Cuál es el procedimiento para calcular el área de un círculo? ______

iii. Establezcan una relación entre los procedimientos anteriores. ______

d) La jefa de Lupita no está segura de la relación entre el volumen de un frasco en forma de prisma poligonal y uno cilíndrico. Además, no sabe cómo se obtuvo la medida del volumen del cilindro y si es correcto. ¿Cómo verificarían que el volumen del frasco cilíndrico, cuya base mide 5 cm de radio y tiene 12 cm de altura, es correcto? Explíquenlo. ______

e) Comparen los datos anotados en la tabla y verifiquen que sean los correctos. Si hay discrepancias, soliciten la intervención del profesor para llegar a acuerdos. Discutan sus respuestas y escriban una conclusión sobre cómo calcular el volumen de un cilindro.

Profundiza

3. Trabaja con un compañero. Efectúen lo que se indica.

a) Si se conoce el área de la base de un prisma poligonal, ¿qué se hace para calcular su volumen?

____

b) Si se conoce el área de la base de un cilindro, ¿qué procedimiento se puede usar para conocer la medida de su volumen? Justifiquen su respuesta. ______________

c) Lupita usó el siguiente procedimiento para calcular el volumen de un cilindro cuya altura es de 10 cm y el radio de su base es de 5 cm.

i. Calculó el área de la base del cilindro. Área de la base: ______________

ii. Multiplicó el área de la base por la altura del cilindro: ______________

d) Usen el procedimiento de Lupita para calcular el volumen de los siguientes cilindros.

i. Radio de 12 cm y altura de 28 cm, volumen: ______________

ii. Radio de 4.5 cm y altura de 17 cm, volumen: ______________

iii. Radio de 10 cm y altura de 15 cm, volumen: ______________

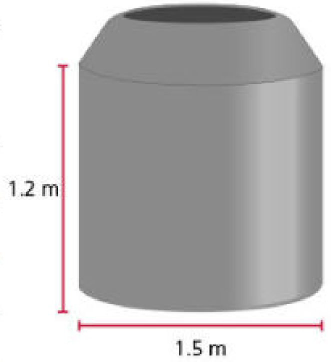
4. Respondan lo que se solicita.

a) Juan almacenará agua en un tinaco como el que se muestra. Para llenarlo usará una cubeta de 30 cm de diámetro y 40 cm de altura.

i. ¿Cuántas cubetas de agua caben en la parte cilíndrica del tinaco? ______________

ii. Expliquen su procedimiento de resolución. ______________

____

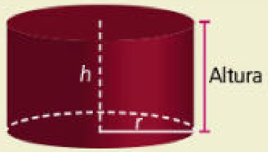


b) Calculen el volumen del cilindro que se obtiene al girar el rectángulo sobre el eje indicado.

c) Comparen sus respuestas y procedimientos de resolución. Elaboren una conclusión entre todos acerca del procedimiento para determinar la medida del volumen de un cilindro.

5. Lee la siguiente información.

Para calcular el volumen de un cilindro se determina el área de la base y se multiplica por la altura.
La fórmula para calcularlo es
$$V = \pi r^2 h.$$
Donde r corresponde al radio y h a la altura.



6. Resuelve lo que se indica.

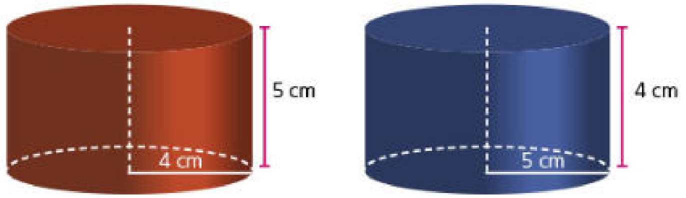
a) Identifica cuál de las fórmulas sirve para calcular la medida del volumen de cualquier cilindro recto. Indica en tu cuaderno por qué las demás fórmulas no lo son.

i. $V = A_b \times \frac{h}{2}$ ii. $V = 2\pi \times r^2$

iii. $V = \pi \times d^2$ iv. $V = \pi \times r \times r \times h$

b) Sin calcular el volumen exacto, indica cuál de los siguientes cilindros tiene el mayor volumen. Justifica tu respuesta. ______________

____



c) Usa la fórmula del volumen para verificar tu resultado.

d) Explica cómo le dirías a un alumno de tercero de secundaria cómo construir una fórmula del volumen de un cilindro recto. Registra tu explicación en el cuaderno, léela con tus compañeros y verifiquen que sea clara y adecuada.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-241a. Modifica los parámetros del cilindro y observa cómo cambian su área y volumen. Comenta tus conclusiones con el grupo.

Ingresa a rwww.redir.mx/matret3-241b. Practica tu habilidad para calcular el volumen de un cilindro. Comenta, con tus compañeros, tu experiencia y qué dificultades afrontaste.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 46 en la bitácora de la página 262.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: medida

Contenido

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de conos tomando como referencia las fórmulas de pirámides

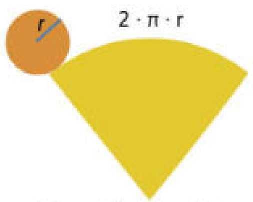
La venta de jugos

Adriana y sus compañeros son los encargados del comité de recaudación de fondos para la fiesta de clausura de tercer grado. Como parte de sus actividades, organizarán una kermés. En otras ocasiones se ha vendido el vaso de jugo a $2.00. Alan propone usar vasos cónicos y no vasos cilíndricos. Adriana indica que, si usan conos con la misma altura que los vasos y cobran a $1.50 el vaso, obtendrían más del doble que si sirven el jugo en vasos normales.

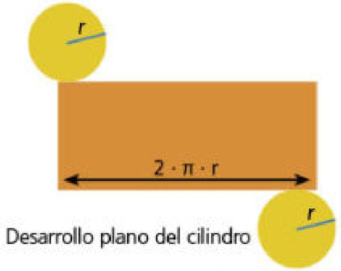
1. Trabaja con un compañero. Respondan lo que se pide.

a) ¿La afirmación de Adriana es correcta? Expliquen. ______

b) Adriana y Alan decidieron construir un cilindro y un cono, de acuerdo con dos condiciones: ambos debían tener la misma medida en la base (con radio de 4 cm) y 12 cm de altura. Especifiquen en las figuras las medidas necesarias para construir ambos cuerpos.



Desarrollo plano del cono



Desarrollo plano del cilindro

i. Indiquen el volumen del cilindro. ______

ii. ¿El volumen del cono será mayor o menor que el del cilindro? Justifiquen su respuesta. ______

iii. Hagan una estimación. ¿Qué relación hay entre el volumen del cono y el del cilindro? ______

c) ¿Esta relación cambiará para otro par de cono y cilindro que compartan las medidas de la base y la altura o será la misma relación? Justifiquen su respuesta. ______

d) Propongan alguna estrategia con la que puedan comparar el volumen de un cono con el de un cilindro si tienen la misma base y altura. ______

e) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Discutan qué estimaciones les parecen las más adecuadas. Identifiquen las estrategias factibles y prepárenlas para efectuarlas en la siguiente sesión. Antes de continuar, recuperen o reelaboren los conos y los cilindros que armaron en la lección 36.

Un paso adelante

2. Trabaja con dos o tres compañeros. Lleven a cabo la actividad con la estrategia que se propone o con la que ustedes hayan seleccionado.

a) Consigan semillas de frijol o lenteja. Tengan a la mano los conos y cilindros que construyeron en la actividad anterior.

i. Llenen el cono con las semillas de frijol o de lentejas, luego vacíen este contenido en el cilindro; repitan el procedimiento hasta que se llene el cilindro. ¿Cuántas veces lo repitieron? ______

ii. Reiteren los pasos para verificar sus resultados.

iii. ¿Qué relación existe entre el volumen del cilindro y el volumen del cono, dada la condición de que tengan las mismas medidas en la base y la altura? Explíquenlo. ______

iv. ¿Cuántas veces cabe el contenido del cilindro en el cono? ______

v. Construyan otro cilindro y un cono cuyo radio de la base sea de 5 cm y la altura de 10 cm.

vi. Usen nuevamente las semillas de frijol o de lenteja. Determinen cuántas veces es mayor el volumen del cilindro respecto al cono recto. ______

b) De acuerdo con lo que hicieron, determinen si cada enunciado es falso o verdadero. Argumenten la respuesta en su cuaderno.

Enunciados	Veracidad
El volumen de un cono con la misma base y el doble de altura que la de un cilindro es la tercera parte del volumen de un cilindro.	
El volumen de un cono con la misma medida de la altura y de la base que la de un cilindro es el triple del volumen de un cilindro.	
El volumen de un cono con la misma medida de la altura y de la base que la de un cilindro es la tercera parte del volumen de un cilindro.	
El volumen de un cono con la misma medida de la altura y de la base que la de un cilindro es el doble del volumen de un cilindro.	
Los volúmenes de un cilindro y un cono con la misma altura y la misma base son iguales.	

c) Escriban una fórmula para calcular el volumen de un cono. ______

d) Indiquen, por medio de esa fórmula, el volumen del cono de la actividad 1. ______

e) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Verifiquen que sean correctas. Consulten las dudas con su profesor y corrijan. Escriban su conclusión acerca de cómo obtuvieron la fórmula para calcular el volumen de un cono.

Profundiza

3. Trabaja con un compañero. Analicen y respondan lo que se solicita.

a) Los amigos de Scarlett le están organizando una fiesta de cumpleaños, por lo que han ido a seleccionar una piñata. Al momento de comprarla, no deciden si adquirir una en forma de pino o en forma de zanahoria. La base de la piñata de zanahoria es mayor que la de forma de pino, pero esta última es más alta.

i. Propongan un procedimiento para estimar el volumen de cada piñata a partir de las imágenes. Consideren las medidas necesarias para hacer la estimación en cada caso. ____________

b) El dueño de la tienda les propuso a los jóvenes llenar las piñatas de dulces y frutas, aquella que requiriera mayor cantidad tendrá mayor volumen. Joshua piensa que otra estrategia para determinar la medida del volumen de las piñatas es usar una fórmula y hacer un cálculo.

i. ¿Están de acuerdo con la propuesta del dueño de la tienda? Expliquen. ____________

ii. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada estrategia planteada? ____________

c) En parejas, tracen lo que se solicita y respondan las preguntas.

Pirámide cuya base tenga más de seis lados

Pirámide cuya base tenga más de 20 lados

i. Si se traza una pirámide cuya base tenga más de 30, 40 o 50 lados, la base se parecerá cada vez más a un círculo. Expliquen por qué. ____________

ii. ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen de una pirámide? ____________

iii. Revisen la fórmula que escribieron en la actividad 2. Comenten si es correcta o corrijan lo necesario. ____________

d) Apliquen su fórmula para obtener el volumen de los siguientes conos.

i. Radio 2 cm y altura 8 cm, volumen: ____________

ii. Radio de 5 cm y altura de 13 cm, volumen: ____________

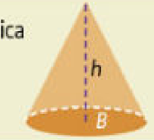
iii. Radio de 12 cm y altura de 19 cm, volumen: ____________

e) Comparen sus resultados y las fórmulas que escribieron. Discutan las diferencias acerca de las literales que utilizaron y comenten las ventajas de usar símbolos y literales en una fórmula.

4. Lee la información con el grupo.

Para calcular el volumen de un cono se determina el área de la base (*B*), se multiplica por la altura (*h*) y el producto se divide entre tres.

La fórmula es $v = \frac{Bh}{3}$.



a) Comparen las fórmulas del volumen del cilindro de la secuencia anterior y la del volumen del cono recto. Expliquen qué diferencias hay. ____________

b) Comenten sus experiencias en clase y elaboren una justificación para la fórmula con que se calcula el volumen de un cono recto. Registren la explicación en su cuaderno, léanla ante el grupo y verifiquen que sea clara y adecuada.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-245a. Resuelve los ejercicios. Si tienes dudas, revisa las actividades de la lección.

Explora www.redir.mx/matret3-245b. Practica tu habilidad para calcular el volumen de un cono. Comenta, con tus compañeros, tu experiencia y qué dificultades afrontaste.

La base de un cono tiene 5 cm de radio y 12 cm de altura. Para que éste sea $\frac{1}{9}$ parte del volumen de un cilindro, ¿cuáles son las medidas del cilindro? Explica en tu cuaderno.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 47 en la bitácora de la página 262.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: medida

Contenido

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

¿Cuál es mayor?

Los participantes de un programa de entretenimiento patrocinado por una televisora local deben superar ciertos retos para llegar a la etapa final y llevarse un premio. El señor Santiago decidió participar en un reto que se llama "¿Cuál es mayor?". Este reto consiste en una ronda de seis preguntas en las que el participante debe poner en evidencia su habilidad para estimar el volumen de dos o más objetos y decir cuál de ellos tiene el mayor volumen. Gana el mejor estimador.

1. Trabaja con un compañero. Efectúen lo que se pide.

a) Si ustedes participaran en ese programa, ¿qué estrategia emplearían para estimar el volumen de dos o más cuerpos geométricos?, ¿qué datos necesitarían? ______________________

____

b) Contesten las preguntas que conforman el reto del señor Santiago. Respondan sin consultar las medidas y justifiquen en el cuaderno.

i. ¿Cuál de los cuerpos tiene mayor volumen?


Punta de un lápiz


Punta de una prótesis dental


Moneda

ii. ¿Cuál tiene mayor volumen, la vela aromática o el dulcero?

iii. ¿Cuál tiene mayor volumen, la vela y el dulcero juntos o la botella de agua?

iv. ¿Cuál tiene mayor volumen, el pastel o los tres botes de pintura, los dos conos de palomitas y los tres conos de helado?

v. ¿Qué tiene mayor volumen, 10 conos con palomitas y 15 conos de helado, o el pastel y los botes de pintura?

vi. Ordenen los 10 cuerpos de mayor a menor volumen.

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten las estrategias que usaron para estimar el volumen de los cuerpos.

Un paso adelante

2. Trabaja con un compañero. Hagan lo que se indica.

a) Al jurado del concurso le informan las medidas de los cuerpos; así, cuando algún concursante no está satisfecho, se puede comprobar si las estimaciones son adecuadas mediante el cálculo del volumen. Con base en los datos de la tabla obtengan la medida del volumen en cada caso.

Cuerpo	Medidas	Volumen
	diámetro: 17 mm; altura: 1.3 mm	
	altura: 18 mm; radio de la base: 3.5 mm	
	altura: 12 mm; diámetro de la base: 3.7 mm	
	radio de la base: 4 cm; altura: 16 cm	
	radio de la base 3.2 cm; altura: 17 cm	
	diámetro de la base: 7.6 cm; altura: 24 cm	
	diámetro de la base: 9 cm; altura: 12 cm	
	radio de la base: 3 cm; altura: 14 cm	
	diámetro de la base: 15 cm; altura: 15 cm	
	radio de la base: 4.32 cm; altura: 12.8 cm	

b) Utilicen los datos de la tabla como referente para determinar si su estimación fue razonable. Justifiquen cada caso y registren las dudas en su cuaderno para solucionarlas en la clase.

c) En el grupo de Guadalupe, para la primera pregunta del concurso, cuatro alumnos dieron las siguientes estimaciones al volumen de la punta del lápiz.

Ana: 540 mm^3 Beto: 200 mm^3

Carmen: 250 mm^3 Diana: 600 mm^3

i. Sin calcular, ¿cómo sabrían qué alumnos hicieron una estimación razonable? Justifiquen la respuesta.

ii. Si un concursante dijera que la estimación del volumen de un bote de 1 l de pintura es de 30 000 cm^3, ¿qué le dirían? Justifíquenlo. ______

iii. Si otro concursante dijera que estima que una botella de agua de 1.5 l tiene 1 500 cm^3 de volumen, ¿qué le dirían? Explíquenlo. ______

d) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros, y entre todos verifiquen que sean correctas. Expliquen las dificultades que afrontaron, resuélvanlas con sus compañeros y con el profesor.

Profundiza

3. Lee con el grupo la siguiente información.

La estimación es una habilidad que se desarrolla al resolver problemas o situaciones de cálculo y de medida, como los anteriores, en los que se ofrece una respuesta a la medida del volumen de cuerpos cilíndricos y cónicos. La habilidad de estimar el volumen se sustenta en los conocimientos acerca de las propiedades de los cuerpos y del cálculo mental.

Una estimación es una aproximación al resultado que no requiere comprobación; por ejemplo, un ingeniero en obras estima la cantidad de metros cúbicos de arena que usará en la construcción de una casa o de un puente. Su experiencia y conocimiento le permitirán dar una buena estimación, de manera que no tenga excedentes o faltantes de material.

a) Expliquen qué entienden por *resultado razonable*. ______

b) Escriban en el cuaderno dos situaciones en las que baste con una estimación y dos en las que se requiera hacer el cálculo exacto.

c) Escriban en el cuaderno las ventajas y desventajas de usar una estimación.

4. Trabaja con dos o tres compañeros. Efectúen lo que se solicita. Justifiquen sus respuestas en el cuaderno.

a) En una empresa se almacena detergente líquido biodegradable en contenedores cilíndricos, como el que se muestra, y para transportarlo tienen pipas con un tanque cilíndrico de 6 m de largo y 2.2 m de diámetro en la base. ¿Aproximadamente cuántos contenedores es posible llenar con el contenido de una pipa? ______

i. ¿Cuál es una buena estimación del volumen que transporta la pipa? ______

ii. El tanque de otra pipa tiene 8 m de largo y 1.50 m de diámetro. ¿El volumen que puede transportar ésta supera al de la otra? Responde sin hacer el cálculo exacto.

b) Para promocionar la marca de leche Bonne-Lait, la empresa regala dulces de leche de forma cónica. Si la base de cada dulce tiene 3 cm de radio y 11 cm de altura, ¿cuál será una estimación adecuada de su volumen? Subráyala.

i. 100 cm^3 ii. 150 cm^3 iii. 300 cm^3 iv. 340 cm^3

c) La empresa cuenta con envases cilíndricos cuya base mide 5 cm de radio y la altura, 12 cm. ¿Cuál es una estimación adecuada de su volumen? Subráyala.

i. 950 cm^3 ii. 900 cm^3 iii. 450 cm^3 iv. 300 cm^3

d) Calculen el volumen de los cuerpos usados en los incisos a), b) y c) para verificar si sus aproximaciones fueron correctas.

e) De acuerdo con las imágenes, propongan un planteamiento para el que la estimación del volumen del cono o del cilindro sea necesaria.

Planteamiento: ______

Planteamiento: ______

f) Comenten sus experiencias en clase. Escriban la forma de hacer estimaciones del volumen de un cono y de un cilindro recto. Registren sus conclusiones en el cuaderno.

TIC

Entra a www.redir.mx/matret3-249a. Observa el video "Volumen de conos y cilindros". Trabaja con un compañero para comparar esa información con la estudiada en las lecciones 47 y 48.

Explora www.redir.mx/matret3-249b. Lee la información y efectúa las actividades. Comenta, con tus compañeros, las dificultades que afrontaron.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 48 en la bitácora de la página 263.

Eje: forma, espacio y medida
Tema: medida

Contenido

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

La dosis exacta

Un laboratorio médico adquirió la patente de un medicamento homeopático. El departamento de mercadotecnia hizo un estudio y recomienda que estos medicamentos se ofrezcan al público en envases cilíndricos de varios tamaños. Por otro lado, ya que se trata de un medicamento controlado, los envases deben contener la dosis exacta, por lo que se han hecho varias pruebas respecto al volumen de los envases.

1. Trabaja con un compañero. Hagan lo que se indica. Justifiquen sus respuestas.

a) De acuerdo con la propuesta se usarán cinco tipos de envases para ofrecer el medicamento al público usuario. Usen la calculadora para determinar los datos que faltan.

Tipo de envase	Altura	Radio de la base	Cantidad de medicamento
A	2.77 cm		6 ml
B	2.77 cm	1.3129 cm	
C		1.6 cm	30 ml
D		1.6 cm	60 ml
E	7.46 cm	2.2628 cm	

Oriéntate

La **homeopatía** es un tipo de medicina alternativa que se caracteriza por que las fórmulas médicas originales se diluyen en gran cantidad de agua o alcohol.

b) Indiquen dos posibles medidas de un envase de 100 ml. Expliquen su procedimiento.

c) Para hacer otro envase se mantuvo el mismo radio de la base que en el B, pero la altura se duplicó. ¿El volumen también es el doble? ____

d) Un envase tiene la misma altura que el envase E, pero el radio de la base se redujo a la mitad. ¿El volumen también se redujo a la mitad? ____

e) Comparen sus resultados y verifiquen que sean correctos. Comenten las dudas con su profesor para disiparlas. Respondan las preguntas:

i. ¿Qué sucede con el volumen de un cilindro si se mantiene fija la medida de la altura y se varía la medida del radio de la base? ____

ii. ¿Qué sucede si se mantiene fija la medida del radio de la base y se varía la medida de la altura? ____

Un paso adelante

2. Trabaja con dos o tres compañeros. Hagan lo que se pide. Justifiquen sus respuestas.

a) En la tabla se han registrado las dimensiones de varios cilindros cuya base tiene 2.5 cm de radio, y se ha variado la medida de su altura. Completen la columna calculando la capacidad de cada cilindro.

Radio (cm)	Altura (cm)	Capacidad (ml)
2.5	4	
2.5	6	
2.5	8	
2.5	10	
2.5	12	
2.5	14	
5	14	
7.5	14	
10	14	
12.5	14	

b) ¿Qué sucede con el volumen de un cilindro cuando se mantiene constante la medida del radio y la altura se duplica? ____

c) ¿Qué tipo de relación (de proporcionalidad, lineal o cuadrática) se establece entre la altura de un cilindro y su volumen si el radio de la base se mantiene constante? ____

d) ¿Qué sucede con el volumen de un cilindro cuando se mantiene constante la medida de la altura y se triplica la medida del radio de la base? ____

e) ¿Qué tipo de relación (de proporcionalidad, lineal o cuadrática) se establece entre el radio de la base de un cilindro y su volumen si la altura se mantiene constante? ____

f) Si se grafica la relación entre la medida de la altura y el volumen de un cilindro cuando se mantiene constante el radio de la base, ¿cómo es la forma de la gráfica? ____

g) Comparen sus respuestas y argumentos. Entre todos, verifiquen que sean correctos. Si hay dudas, exténenlas con el fin de solucionarlas.

Profundiza

3. Trabaja con dos o tres compañeros. Efectúen lo que se solicita. Justifiquen sus respuestas.

a) En la tabla se indican las medidas de varios conos. En un caso se mantiene fijo el radio de la base; en el otro, la altura. Complétenla.

Altura (cm)	Radio (cm)	Volumen (cm³)	Altura (cm)	Radio (cm)	Volumen (cm³)
2	4		7	1.2	
3	4		7	1.5	
4	4		7	1.8	
5	4		7	2.1	
6	4		7	2.4	
7	4		7	2.7	
8	4		7	3	

i. ¿Cuál es el comportamiento (lineal o cuadrático) de la relación entre la altura de un cono y su volumen si la altura se mantiene fija? ______

ii. ¿Cuál es el comportamiento (lineal o cuadrático) de la relación entre el radio de la base de un cono y su volumen si la altura se mantiene fija? ______

b) Tracen, en seguida, las gráficas que representen la relación entre la altura y el volumen de un cono si la medida del radio de la base se mantiene en 4 cm, y la relación entre la medida del radio de la base y el volumen si la altura se mantiene en 7 cm.

c) Comparen sus gráficas y verifiquen que sean las correctas. Planteen algunas preguntas que se puedan responder a partir de las gráficas y expóngalas ante el grupo.

4. Lee con el grupo la siguiente información. Respondan en el cuaderno.

Cuando en una familia de conos o de cilindros la medida del radio de la base se mantiene fija, la relación entre la medida del volumen y la medida de la altura es de proporcionalidad directa; su gráfica está representada por una recta que pasa por el origen.

Si en la familia de conos o cilindros la medida de la altura se mantiene fija, la relación entre el volumen y la medida del radio de la base es cuadrática, su grafica está representada por una parábola.

a) Escriban una conclusión sobre qué entienden por *familia de conos o cilindros*.

b) Expliquen por qué las rectas y las parábolas que se mencionan pasan por el origen.

5. Responde las preguntas.

a) En la actividad 2, identifica la ecuación que relaciona el volumen del cilindro con la medida de la altura si el radio de la base se mantiene constante. ______

b) En esa misma actividad, identifica la ecuación que relaciona el volumen del cilindro con la medida del radio de la base si la altura se mantiene constante. ______

c) En la actividad 3, identifica la ecuación que relaciona el volumen del cono con la medida de la altura si el radio de la base se mantiene constante. ______

d) En esa misma actividad, identifica la ecuación que relaciona el volumen del cono con la medida del radio de la base si la altura se mantiene constante. ______

e) Haz, en tu cuaderno, la gráfica de las cuatro ecuaciones.

f) Discute con el grupo la información anterior; si hay dudas, coméntenlas con el fin de aclararlas. Analicen la situación en que el volumen de un cilindro y de un cono se mantiene constante, identifiquen si la relación entre la medida de la altura y la medida del radio de la base es de proporcionalidad directa, lineal, cuadrática o de algún otro tipo. Registren sus conclusiones; verifiquen que sus argumentos sean claros y adecuados.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-253a. Efectúa las actividades sobre volúmenes. Haz un mapa mental sobre todo lo que sabes acerca de conos y cilindros. Preséntalo a tus compañeros.

Explora www.redir.mx/matret3-253b. Efectúa las actividades. Comenta, con tus compañeros, tu experiencia y qué dificultades afrontaron.

El desarrollo plano de un cono es sector circular con un ángulo de 80° y un radio de 7.5 cm. Indica las dimensiones de la base y el volumen del cono. Traza el desarrollo plano de dos cilindros diferentes que tengan el mismo volumen que el cono.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 49 en la bitácora de la página 263.

Eje: manejo de la información
Tema: proporcionalidad y funciones

Contenido

Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

Cambio climático

El clima está cambiando. Así lo advierten los pronósticos del Panel Intergubernamental sobre Cambio Climático (IPCC). Se asegura que este fenómeno, provocado probablemente por el hombre, está afectando al planeta y que, si no se reducen las emisiones de dióxido de carbono (CO_2), el promedio de la temperatura global en la Tierra aumentará en los próximos años. Las investigaciones apuntan a que una de las causas del cambio climático es el aumento del consumo de energía. En la tabla se muestra el consumo mundial de energía eléctrica. Esta medición se hace sobre la producción de las centrales eléctricas y de las plantas de cogeneración.[1]

Año	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Consumo de energía eléctrica (en billones de kWh)	1.5019	2.1759	3.2681	4.9763	6.3709	7.5517	10.8293	12.1147	14.0784	16.6567	19.6655

1. Reúnete con un compañero y contesten lo que se pide.

a) ¿Existe alguna regularidad entre los datos? ______

b) ¿Cuál sería el pronóstico del consumo para los años 2015 y 2020? ______

c) ¿Se podría modelar con una función lineal o cuadrática? Expliquen su respuesta. ______

d) ¿Por qué el consumo de energía incide en el aumento de las emisiones de gases contaminantes? ______

e) Indiquen cinco medidas factibles en su hogar que ayuden reducir el consumo de energía eléctrica. ______

f) Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y comenten qué regularidades encuentran entre los datos. Hagan una lista con las medidas que proponen para reducir el consumo de energía eléctrica. Indiquen cuáles ya practican.

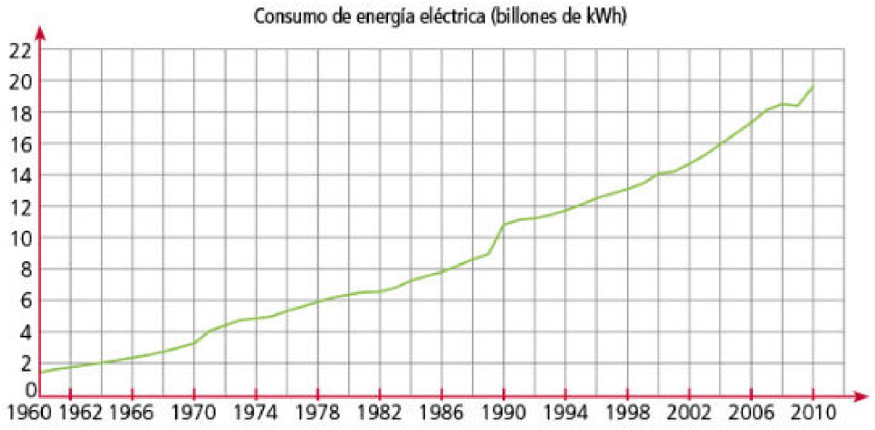
Oriéntate

El cambio climático es el cambio en el estado del clima identificable y que persiste en periodos prolongados. En los últimos años se ha estudiado la relación de este fenómeno con el aumento de los gases de efecto invernadero provocado por la actividad humana.

[1] Adaptado de: Banco Mundial, "Indicadores del desarrollo mundial". A partir de los datos disponibles en datos.bancomundial.org/indicador/EG.USE.ELEC.KH.PC y en data.un.org/Data.aspx?q=vietnam&d=WDI&f=Indicator_Code%3AEG.USE.ELEC.KH.PC%3BCountry_Code%3AVNM (Consulta: 26 de junio de 2013).

Un paso adelante

2. Trabaja con dos o tres compañeros. Analicen la gráfica y efectúen lo que se pide.



Adaptado de: *Idem*.

a) Unan con un segmento los puntos que corresponden a 1990 y 2000. ¿Cuál es la relación entre la línea que trazaron y la gráfica? ______

b) ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el segmento que trazaron? ______

c) Unan los puntos que corresponden a 1960 y 1967, así como los puntos que corresponden a 2001 y 2007. ¿Se presenta una relación similar entre las rectas y la gráfica? Expliquen su respuesta. ______

d) Escriban la ecuación de las rectas que trazaron. ______

e) Unan los puntos que corresponden a 1970 y 2000. Escriban una conclusión sobre la relación entre este segmento y la gráfica. ______

f) Planteen una predicción sobre el consumo de energía eléctrica en 2015 y en 2020. Argumenten su respuesta. ______

g) Comparen sus respuestas con las de los otros equipos. Verifiquen las ecuaciones que escribieron. Discutan qué representan las variables que usaron. Comenten cuál es la ventaja de modelar algebraicamente la variación entre dos conjuntos de datos. Escriban una conclusión al respecto.

Profundiza

3. Reúnete con un compañero y analicen el planteamiento. Respondan lo que se pide.

a) Un átomo está formado por electrones orbitando alrededor de un núcleo. Las ideas básicas sobre la estructura de los electrones son las siguientes.

i. Hay siete niveles de energía, o capas, donde pueden situarse los electrones, numerados del 1, el más cercano al núcleo de átomo, al 7, el más lejano.

ii. A su vez, cada nivel tiene sus electrones repartidos en distintos subniveles, que pueden ser de cuatro tipos: s, p, d, f.

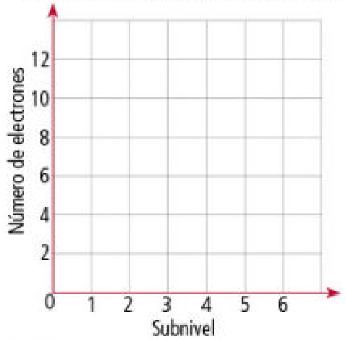
iii. Cada subnivel contiene, como máximo, dos electrones. Hay un subnivel tipo s, tres tipo p, cinco tipo d y siete del tipo f.

iv. La distribución del número de electrones en los cuatro primeros niveles se resume en la tabla. Complétala.

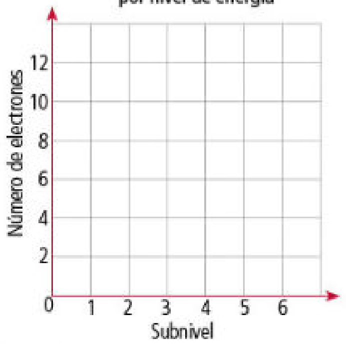
Niveles de energía	1	2		3			4			
Subniveles	s	s	p	s	p	d	s	p	d	f
Número de subniveles de cada tipo	1	1	3	1	3	5	1	3	5	7
Número de electrones en los subniveles	2	2	6							
Número máximo de electrones por nivel	2	8								

b) Elaboren las gráficas que se piden con base en la información de la tablas. En cada caso continúen las sucesiones numéricas que se forman.

Número de electrones en los subniveles



Número máximo de electrones por nivel de energía



c) ¿Qué tipo de variación existe entre el nivel de energía y el número máximo de electrones por nivel? Expliquen su respuesta. ______________________________

d) ¿Qué tipo de variación existe entre el subnivel y el número de electrones por subnivel? Expliquen su respuesta. ______________________________

e) ¿Qué ecuación modela la relación entre el nivel de energía y el número máximo de electrones por nivel? Expliquen cómo la obtuvieron. ______________________________

f) ¿Qué ecuación modela la relación entre el subnivel de energía y el número de electrones por subnivel? Expliquen cómo la obtuvieron. ______________________________

g) Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen sus respuestas. Comenten cómo determinaron la expresión algebraica de los incisos d) y e). Con ayuda de su profesor, comenten la manera en que resolvieron los problemas. Anoten las conclusiones en su cuaderno.

4. Trabaja con un compañero, analicen la información y efectúen, en su cuaderno, lo que se indica. Justifiquen cada respuesta.

La cantidad de alcohol en la sangre disminuye linealmente respecto al tiempo transcurrido sin ingerir alcohol. Una persona abandona una fiesta y decide conducir su automóvil, a pesar de que tiene 0.96 g/l de sangre en el cuerpo; tres horas más tarde tiene 0.42 g/l. El límite de alcohol en la sangre permitido para los conductores de coches es de 0.2 g/l de sangre.

a) Si la persona es detenida en un control de alcoholímetro al cabo de tres horas y media de haber abandonado la fiesta, ¿estaría cometiendo una infracción?

b) Determinen después de cuánto tiempo la persona podrá conducir sin cometer una infracción.

c) ¿Cuál es el índice al que disminuye el alcohol en la sangre?

d) Tracen una gráfica que represente la situación.

e) Escriban la ecuación que modela la variación a la que disminuye la cantidad de alcohol en la sangre respecto al tiempo.

f) Comparen sus respuestas, guiados por el profesor, e intercambien puntos de vista; por ejemplo, ¿cómo determinaron el tiempo necesario para que la persona esté en condiciones de conducir? Anoten sus conclusiones.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-257a. Haz clic en "La función lineal y la función exponencial". El video hace una comparación entre las funciones lineales y las cuadráticas. Escribe en el cuaderno un resumen de todo lo que conoces acerca de las relaciones de variación cuadrática y lineal. Coméntalo con un compañero y con el profesor.

Explora www.redir.mx/matret3-257b. Efectúa las actividades sobre funciones lineales. Discute tus conclusiones con un compañero.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 50 en la bitácora de la página 263.

Se deja caer un objeto y se registra la distancia que recorre. Después de un segundo fueron 4.9 m. ¿Cuántos metros habrá recorrido en dos segundos?

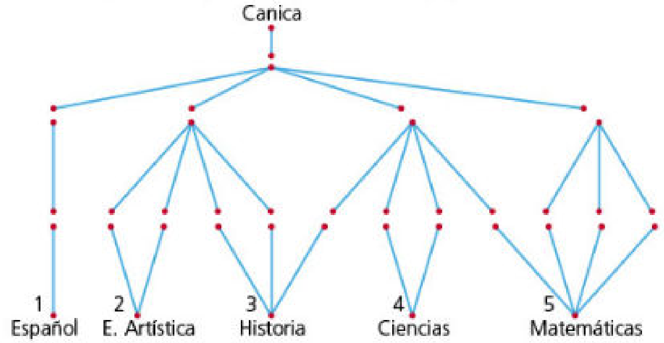
Eje: manejo de la información
Tema: nociones de probabilidad

Contenido

Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

El recorrido de la canica

Leonardo participó en un concurso que consiste en lanzar una canica de manera que recorra diversos caminos y finalmente caiga en un número de 1 a 5; cada número corresponde a un tema sobre el que deberá responder una pregunta. El diagrama muestra los caminos que puede tomar la canica. En cada nodo es igualmente probable que la canica vaya por un camino u otro.



1. Trabaja con un compañero. Respondan y justifiquen lo que se pide.

a) Al modelar la situación anterior, consideren como experiencia aleatoria *lanzar la canica y mirar en qué número cayó*. ¿Cuál es la probabilidad de que el recorrido de la pregunta sea de Español? ______

______

b) Consideren el evento **A**: "La pregunta es de Educación Artística" y evento **B**: "La pregunta es de Ciencias". ¿Qué evento es más probable? ______

______

c) Comparen los eventos **C**: "La pregunta es de Matemáticas", y **D**: "La pregunta es de Historia". ¿Cuál es menos probable? ______

______

d) Consideren el evento **F**: "La canica cae en un número menor o igual a 3" y el evento **G**: "La canica cae en un número mayor que 3". ¿Qué evento es más probable? ______

e) Escriban dos eventos con la misma probabilidad.

Evento: ______

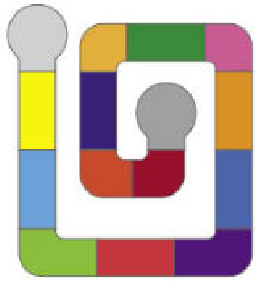
Evento: ______

f) Discutan sus respuestas con otra pareja. Comenten algunos juegos de azar cuyos participantes tengan las mismas posibilidades de ganar o perder y otros en los que no. Anoten en el cuaderno las características de los juegos en que los jugadores tienen las mismas posibilidades de ganar.

Un paso adelante

2. Trabaja con un compañero. Efectúen lo que se pide.

a) Virginia y Cecilia juegan en el tablero que se muestra. Este juego consiste en lanzar un dado, y avanzar tantas casillas como indique la cara del dado. Gana quien llegue primero a la meta.



i. Indiquen, en cada caso, si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

☐ Virginia tiene mayor posibilidad de ganar, pues ha ganado en los últimos tres lanzamientos.

☐ Cecilia tiene más posibilidades de ganar, ya que jugarán con su dado de la suerte.

☐ Virginia tiene mayor posibilidad de ganar, ya que la última vez que jugó, de las 100 veces que lanzó el dado, obtuvo 20 veces un 5, así que ella garantiza que avanzará más rápido.

☐ Cecilia y Virginia tienen las mismas posibilidades de ganar, ya que ambas lanzarán el mismo dado, y la medida de probabilidad de todos los resultados posibles es la misma.

☐ Cecilia tiene mayor posibilidad de ganar, ya que lanzará primero y lleva una ventaja sobre Virginia.

ii. Escriban una conclusión sobre quién tiene más probabilidad de ganar el juego. ______

______

iii. Si se modifican las reglas del juego de forma que las dos lancen un dado de manera simultánea y avancen al mismo tiempo, ¿quién tiene más probabilidad de ganar? Expliquen su respuesta.

______

b) Lucero y Pablo diseñaron la ruleta de la fortuna que se muestra a la derecha.

i. Al girarla, ¿cuál es la probabilidad de que ésta se detenga en "bancarrota"? ______

ii. ¿La probabilidad de girar la ruleta y que ésta se detenga en "10" es la misma de que se detenga en "bancarrota"? Justifiquen su respuesta. ______

______

iii. Al girar la ruleta de la fortuna, ¿todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir? Justifiquen su respuesta. ______

______

iv. Alfredo y Juan juegan con la ruleta. Alfredo gana el juego si llega a 500 puntos, Juan gana si Alfredo queda en bancarrota. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar? ______

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Si hay dudas o afrontaron dificultades, extérnenlas con el fin de darles solución.

Profundiza

3. Comenta la siguiente información en plenaria.

Dado un experimento aleatorio, se dice que los eventos o resultados posibles de dicho experimento aleatorio son:

- **Equiprobables**, es decir, la medida de su probabilidad de ocurrencia es la misma. El término *equiprobable* proviene del vocablo *equi*, que significa "igual".
- **No equiprobables**, es decir, la medida de probabilidad de cada evento es distinta.

Cuando en un juego de azar todos los participantes tienen la misma probabilidad de ganar, se dice que es un juego **justo**.

a) Usando la información anterior, justifiquen si los siguientes juegos son justos.

i. En el juego del recorrido de la canica hay cinco jugadores numerados de 1 a 5. Cada uno gana un punto si la canica cae en su número. Gana el juego el primero en llegar a tres puntos.

___

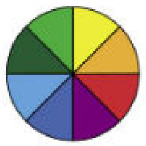
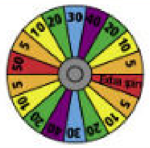
ii. El juego de mesa propuesto por Cecilia y Virginia. ___

iii. Con la modificación que se propuso, ¿se trata de un juego justo? ___

iv. Describan un juego justo que utilice la ruleta de la fortuna diseñada por Lucero y Pablo. ___

4. Trabaja con un compañero. Efectúen lo que se pide.

a) Analicen las ruletas y respondan.

Ruleta A	Ruleta B
	

i. ¿Cuál es el espacio muestral para la ruleta A? ___

ii. Expliquen si los resultados posibles son equiprobables. ___

iii. Describan un juego para la ruleta A que no sea justo. Consideren tres participantes. ___

iv ¿Cuál es el espacio muestral en la ruleta B? ___

v. Expliquen si los resultados posibles son equiprobables. ___

vi. Describan un juego justo, de dos participantes, para la ruleta B. ___

b) Don Mario incorporó recientemente a su tienda de regalos un tablero numerado de 1 a 50. Éste es el "Tablero de sorpresas", ya que uno puede comprar un "número" de $100.00 en la tienda para que don Mario quite del tablero la calcomanía con la etiqueta del número comprado; si debajo aparece el símbolo ☺, se obtiene un regalo sorpresa cuyo valor es de $500.00.

Columna

1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	Fila
11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	
21	22	23	24	25	
26	27	28	29	30	
31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	
41	42	43	44	45	
46	47	48	49	50	

i. Don Mario anuncia que hay cinco números premiados. En estas condiciones, ¿es conveniente comprar un "número" del "Tablero de sorpresas"? Justifiquen su respuesta. ___

ii. ¿Cuántos premios debe haber para que el juego sea justo? ___

c) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Lleguen a acuerdos, con la ayuda de su profesor, respecto a la identificación de juegos de azar justos.

TIC

Explora www.redir.mx/matret3-261a. Observa el video. Si tienes dudas, consulta las conclusiones que escribieron en esta lección.

Explora www.redir.mx/matret3-261b. Efectúa las actividades y comprueba las conclusiones que obtuviste en las lecciones de probabilidad y estadística de este curso. Discute tus conclusiones con tu grupo.

Para la bitácora

Resuelve las actividades correspondientes a la lección 51 en la bitácora de la página 263.

Lecciones 42 y 43

1. Plantea la ecuación o sistema de ecuaciones a cada problema y resuelve en tu cuaderno.

a) Encuentra dos números cuyo cociente sea $\frac{4}{5}$ y su producto 80.

b) Encuentra un número de dos cifras cuya suma sea 15 y el triple de la primera exceda el doble de la segunda en 5.

2. Responde lo siguiente.

a) Las soluciones de una ecuación cuadrática están representadas gráficamente por ______________

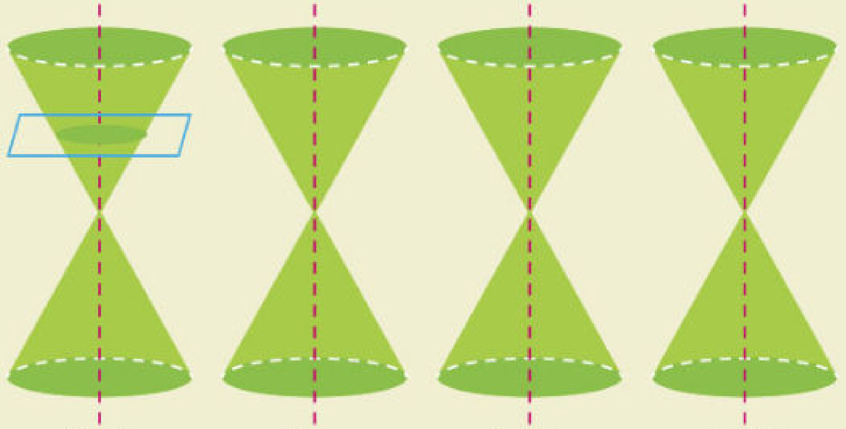
____

Lecciones 44 y 45

a) ¿Que son las secciones cónicas? ______________

____

b) Dibuja sobre cada cono el corte que hay que hacer para obtener cada una de las cónicas.



Círculo Elipse Parábola Hipérbola

Lecciones 46 y 47

a) ¿Cuál es la fórmula para obtener el volumen de un cilindro? ______________

b) Explica cómo se obtuvo esa fórmula. ______________

____

c) ¿Cuál es la fórmula para obtener el volumen de un cono? ______________

d) Explica cómo se obtuvo esa fórmula. ______________

____

Lecciones 48 y 49

a) ¿Cuál es la relación entre el volumen del cono y el del cilindro? ______________

____

b) ¿En qué condiciones se da esta relación? ______________

c) Si se conoce el volumen (v) y el radio (r) de un cono, ¿qué ecuación representa la altura? ______________

d) Si se conoce el volumen (v) y la altura (h) de un cilindro, ¿qué ecuación representa el radio? ______________

e) ¿Qué sucede con el volumen de un cilindro al duplicar su radio? ______________

____

Lección 50

1. Analiza la tabla. Contiene datos del recorrido de una atleta que corre un maratón a velocidad constante.

Tiempo (h)		1	1.5			3
Distancia (km)	5.5	11	16.5	22		33

a) Completa la tabla y determina la ecuación que relaciona el tiempo con la distancia.

b) Si el maratón consta de 42 km, ¿en cuánto tiempo lo termina?

2. Para probar cierto antibiótico, en un laboratorio se hace un cultivo bacteriológico. En presencia de dicho antibiótico, la reproducción de las bacterias ocurre como se ve en la tabla.

Cantidad de bacterias	3	5	11	21
Tiempo (minutos)	0	1	2	3

a) Determina la ecuación cuadrática que relaciona el tiempo y la cantidad de bacterias.

b) Con base en dicha relación determina cuántas bacterias habrá después de una hora.

Lección 51

a) En juegos de azar comunes, como lanzar el dado o una moneda al aire, ¿ambas partes están en igualdad de condiciones para ganar? Explica por qué. ______________

______________________________.

b) Crea un juego usando dos dados en que la probabilidad de ganar para cada parte sea la misma.

____

____

La geometría del balón y los sólidos de revolución

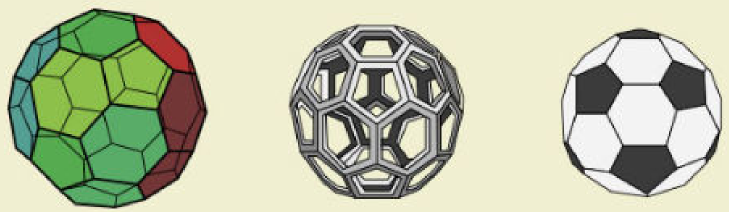
En esta sección analizarás el balón de futbol desde una perspectiva matemática.

1. Trabaja con dos compañeros en la siguiente actividad. Respondan en el cuaderno.

a) Investiguen las propiedades geométricas del balón de futbol.

b) ¿Un balón de futbol puede ser considerado un sólido de revolución?

c) Cuando un balón de futbol está totalmente inflado, parece una esfera perfecta, ¿realmente es una esfera? ¿Por qué?



d) El balón de futbol está formado por ____________ pentágonos y __________ hexágonos.

e) ¿Cuántas aristas tiene en total? ______________________

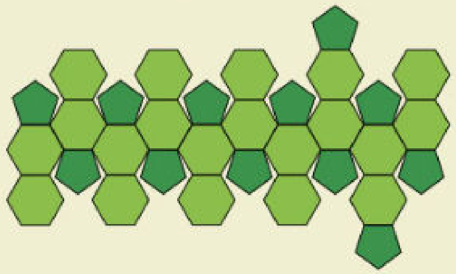
f) ¿Cuántos vértices tiene? _____________________

g) Consigan un balón y comprueben sus respuestas.

2. Construye, con ayuda de tu profesor, un balón de futbol.

a) Necesitas cartulina o cartón, juego de geometría, tijeras y pegamento.

b) Traza un desarrollo plano como el de la figura.



c) ¿Cuánto mide la superficie del balón construido?

d) Redacten, en su cuaderno, una explicación de su respuesta.

e) Investiguen qué otras formas se usan para elaborar balones de futbol.

Otro sólido de revolución: el cono truncado

Doña Berna tiene una florería, y ahora fabricará sus propias macetas. Quiere decorarlas con diversas formas geométricas, tal como se muestra en la figura.

1. Reúnete con dos compañeros y respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo debe de ser el desarrollo plano que permita a doña Berna construir sus macetas?

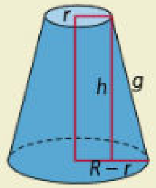
b) ¿Qué cuerpo geométrico les recuerda? ______________________________________

____

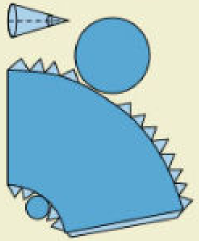
c) ¿Es un cuerpo de revolución?, ¿por qué? ____________________________________

____

d) Dibuja en tu cuaderno la gráfica que permita generar dicho cuerpo al rotarla alrededor del eje *y*.



El **cono truncado** es el cuerpo geométrico que resulta al cortar un cono por un plano paralelo a la base y separar la parte que contiene al vértice. Un cono truncado tiene una base menor y una base mayor.
La altura es el segmento que une perpendicularmente las dos bases.
Los radios son los radios de sus bases.
La fórmula para calcular su volumen es $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$.



Escriban, en el cuaderno, un modo para verificar esta fórmula a partir de la usada para calcular el volumen del cono. Consideren que el cono completo tiene una altura de $h + n$.

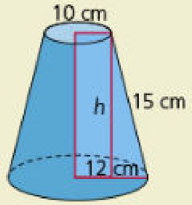
Lía, hija de doña Berna, investigó la manera de construir las macetas, y le mostró a doña Berna el desarrollo plano.

2. Responde las preguntas.

a) Explica, paso a paso, cómo se determinan las medidas del desarrollo plano. ____________

____

____



3. Reúnete con un compañero y reproduzcan en cartoncillo el desarrollo plano del cono trunco.

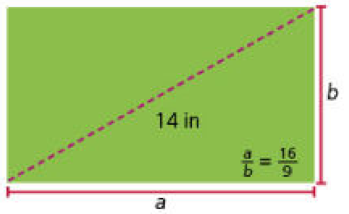
a) Utilicen las medidas del cuerpo.

b) Con ayuda del profesor, calculen el volumen de la figura.
Anoten, en el cuaderno, el procedimiento que emplearon y el resultado.

4. Registren, en el cuaderno, sus conclusiones respecto al estudio de este tema.

Lee con atención los planteamientos, elige la respuesta correcta y márcala en la sección de respuestas.

1. Una pantalla de 14 pulgadas (medida de la diagonal) tiene formato *widescreen*, es decir, la razón $\frac{\text{largo}}{\text{alto}}$ es $\frac{16}{9}$. ¿Qué sistema de ecuaciones permite conocer el largo (*a*) y el ancho (*b*) de la pantalla?



a) $a^2 - b^2 = 14^2$; $9a + 16b = 0$

b) $a^2 - b^2 = 14^2$; $9a - 16b = 0$

c) $a^2 + b^2 = 14^2$; $9a - 16b = 0$

d) $a^2 + b^2 = 14^2$; $9a + 16b = 0$

2. Un colegio organizó un baile para el día del estudiante; los boletos costaban \$30.00 para la comunidad escolar y \$50.00 para el público en general. En total se vendieron 1 100 boletos y se recaudaron \$39 000.00. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

a) Comunidad escolar: 800 boletos; público en general: 300 boletos.

b) Comunidad escolar: 300 boletos; público en general: 800 boletos.

c) Comunidad escolar: 700 boletos; público en general: 400 boletos.

d) Comunidad escolar: 400 boletos; público en general: 700 boletos.

3. ¿Qué figura se obtiene al hacer un corte paralelo a la base de un cono?

a) Una elipse. b) Una hipérbola. c) Una circunferencia. d) Una parábola.

4. El radio de un cono mide el doble del de un cilindro, pero la altura del cilindro mide el doble de la del cono. ¿Cómo se relacionan los volúmenes de ambos cuerpos?

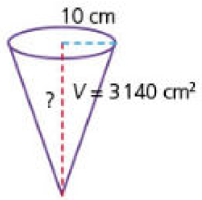
a) El volumen del cilindro es tres veces el del cono.

b) Ambos cuerpos tienen el mismo volumen.

c) El volumen del cono es dos veces el del cilindro.

d) El volumen del cilindro es 1.5 veces el del cono.

5. Un cono como el de la imagen tiene 3 140 cm³ de volumen. ¿Cuánto mide la altura del cuerpo? Considera $\pi = 3.14$.



a) 300 cm b) 100 cm

c) 30 cm d) 10 cm

6. Se fabricará una lata cilíndrica de 15 cm de altura y 4 cm de radio en la base. ¿Qué cantidad de material se requiere? Considera las dos tapas y la cara lateral.

a) $(32\pi + 120\pi)$ cm² b) 240π cm²

c) $(16\pi + 60\pi)$ cm² d) 64π cm²

7. ¿Qué magnitudes están relacionadas mediante una expresión lineal?

a) La distancia que recorre un automóvil con aceleración constante y el tiempo transcurrido.

b) El volumen de un cubo y el área de una de sus caras.

c) La altura desde la que se suelta un objeto y el tiempo que tarda en caer.

d) El perímetro de un círculo y la medida de su radio.

8. ¿Qué magnitudes están relacionadas mediante una expresión cuadrática?

a) El área de un cuadrado y su perímetro.

b) El volumen de un cubo y la medida de una de sus aristas.

c) El tamaño de un documento electrónico y el tiempo que tarda en descargarse.

d) La distancia que recorre un automóvil con velocidad constante y el tiempo transcurrido.

9. Abel, Beto y Carlos lanzan por turnos dos monedas. Abel gana si caen dos águilas; Beto, si caen dos soles; Carlos, si las monedas muestran caras diferentes. ¿Quién tiene ventaja y cuál es su probabilidad de ganar?

a) Carlos; su probabilidad de ganar es $\frac{1}{2}$.

b) Nadie; la probabilidad de ganar de cada uno es $\frac{1}{3}$.

c) Carlos; su probabilidad de ganar es $\frac{3}{4}$.

d) Nadie; la probabilidad de ganar de cada uno es $\frac{1}{4}$.

10. Daniel, Eladio y Fidel lanzan por turnos dos dados, suman los puntos y, con base en el resultado, obtienen cierta cantidad de fichas. ¿Qué condiciones NO corresponden a un juego justo?

a) Si la suma es par, Daniel obtiene una ficha; si es mayor que 7, Eladio obtiene una ficha; si es menor que 7, Fidel obtiene una ficha.

b) Si la suma es 7, Daniel obtiene una ficha; si es 4, Eladio obtiene dos fichas; si es 12, Fidel obtiene seis fichas.

c) Si la suma es 2, Daniel obtiene seis fichas; si la suma es 3, Eladio obtiene tres fichas; si la suma es 4, Fidel obtiene dos fichas.

d) Si la suma es impar, Daniel obtiene una ficha; si es menor que 4, Eladio obtiene dos fichas; si es mayor que 10, Fidel obtiene dos fichas.

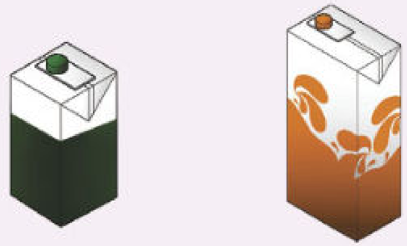
Respuestas de la evaluación correspondiente al bloque 5.

1. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
7. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
8. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
9. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Lee con cuidado la situación y responde lo que se pide. Justifica tus respuestas.

Relación entre área y volumen

Un envase puede ser un prisma cuadrangular o un prisma rectangular, como los que se presentan a continuación.



Al desarmar un envase con forma de prisma rectangular y tomar un rectángulo del material, se obtiene un cilindro de aproximadamente 8 cm de diámetro y 23 cm de altura. Al cerrar este cilindro, su volumen supera el del prisma rectangular, que es de 1 l.

Pregunta 1. Indica el material utilizado para hacer el cilindro (considera la cara lateral y las bases) y su volumen.

Pregunta 2. Señala las dimensiones del prisma rectangular.

Pregunta 3. Indica las dimensiones de otros dos prismas para que su capacidad sea de 1 l.

Pregunta 4. Proporciona las dimensiones de otros dos cilindros para que su capacidad sea la misma que la del cilindro referido en el texto.

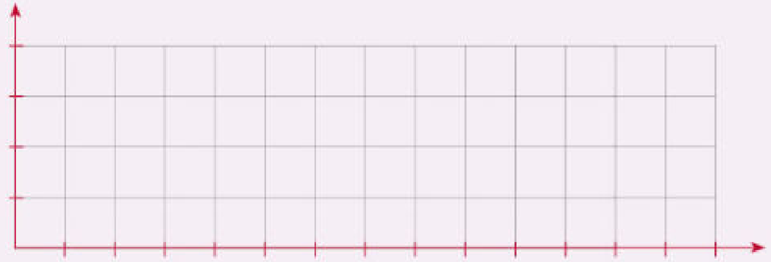
Pregunta 5. Menciona las dimensiones de un cono cuya capacidad sea de 1 l.

Tiro parabólico

Se denomina movimiento parabólico al que sigue un objeto cuya trayectoria describe una parábola. En una investigación sobre la trayectoria de un objeto, se determinó que la función que modela dicha trayectoria mientras el objeto se encuentra en el aire es $y = -0.05x^2 + 0.7x$.

Pregunta 1. Indica qué representa la variable y y qué representa la variable x en la ecuación.

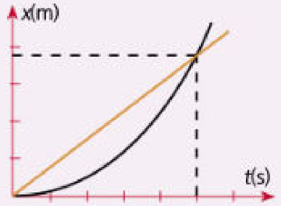
Pregunta 2. Describe la trayectoria del objeto. Justifica tu respuesta con argumentos gráficos y algebraicos.



Pregunta 3. Escribe una pregunta que se resuelva a partir de esta situación.

El policía de tránsito

Un motociclista va atrás de un automovilista, como se muestra en la imagen.



Pregunta 1. Explica qué gráfica representa al motociclista y cuál al automovilista.

Pregunta 2. ¿En cuánto tiempo lo alcanzará?

Pregunta 3. ¿Qué distancia recorrerá el motociclista para alcanzar al automóvil?

Pregunta 4. ¿Cuál es la distancia que recorre el automóvil?

Pregunta 5. Completa los datos que faltan en la gráfica. Rotular las marcas del eje horizontal con 1, 2, 3, 4, 5 y 6; las del eje vertical, con 20, 40, 60 y 80

Autoevaluación

Analiza tu desempeño en el bimestre y selecciona, en cada caso, la acción que mejor lo represente.

	Soy capaz de explicarlo a otros o ayudarlos.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resolver problemas que implican plantear y resolver ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones				
Reconocer las formas de las secciones que se obtienen al hacer cortes a un cilindro o a un cono recto, así como calcular sus medidas				
Reconocer el significado de las fórmulas para calcular el volumen del cilindro y del cono				
Calcular el volumen de un cilindro, de un cono o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas				
Reconocer el tipo de relación (lineal o cuadrática) de diversas situaciones				
Reconocer cuáles son las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo				

Comenta con el profesor tus avances y dificultades.

Criterios de congruencia para triángulos. Para determinar si dos triángulos son congruentes se utiliza alguno de estos criterios: a) Lado-lado-lado (LLL), b) Lado-ángulo-lado (LAL) y c) Ángulo-lado-ángulo (ALA).

Criterios de semejanza para triángulos. Para determinar si dos triángulos son semejantes se utiliza alguno de estos criterios: a) tener dos ángulos correspondientes iguales; b) si las medidas de los tres lados de un triángulo y sus correspondientes en el otro son proporcionales y c) si el ángulo comprendido entre dos lados, de tal forma que el ángulo correspondiente sea de igual medida y la longitud de los lados correspondientes sean proporcionales.

Desviación media. Mide el promedio de cuánto se aleja cada dato respecto a la media.

Ecuación de segundo grado. Es una expresión algebraica de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, el primer término tiene la literal elevada al cuadrado y el coeficiente a debe ser diferente de cero.

Encuesta. Instrumento de recolección de datos que considera una muestra representativa de una población específica.

Espacio muestral. Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Eventos complementarios. Dos eventos se denominan complementarios cuando contienen todos los resultados posibles en el espacio muestral pero no tienen elementos en común. La suma de las medidas de sus probabilidades es 1.

Eventos independientes. eventos de un experimento aleatorio en los que la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de que el otro suceda.

Eventos mutuamente excluyentes. eventos de un experimento aleatorio que, al no tener elementos en común, no pueden ocurrir simultáneamente.

Factor. Cada una de las cantidades que se multiplican para obtener un producto.

Factorización. Consiste en que los términos de una ecuación de segundo grado se agrupen en un miembro de la igualdad y se escriban como factores. Algunos casos particulares de la factorización son los siguientes.
Factor común: $x^2 - x = 0$; se factoriza como $x(x - 1) = 0$.
Trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2xy + y^2$; se factoriza como $(x + y)(x + y)$.
Diferencia de cuadrados: $x^2 - xy + xy - y^2$; se factoriza como $(x - y)(x + y)$.
Trinomio con término común: $x^2 + (a + b)x + ab$; se factoriza como $(x + a)(x + b)$.

Fórmula general de ecuaciones de segundo grado. Permite resolver ecuaciones de la forma $Ax^2 + Bx + C = 0$; la fórmula general es: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. El signo ± indica que la fórmula se resuelve dos veces, para cuando se utiliza + y para cuando se utiliza –.

Población. Es un grupo de elementos que comparten características específicas.

Muestra. Es una parte de los elementos de una población, se dice que es representativa cuando su constitución asemeja las características de ésta.

Rango. Diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo en un conjunto de datos numéricos.

Sólidos de revolución. Cuando una figura plana gira 360° sobre un eje se dice que se genera un cuerpo geométrico. Según el tipo de figura plana se puede obtener un cilindro recto, un cono recto y la esfera; y estos últimos son llamados sólidos de revolución.

Bibliografía para el alumno (Biblioteca Escolar)

Bosch, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a la incertidumbre*, México, SEP-Editorial Santillana, serie Espejo de Urania, 2002.

Bosch, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a las incógnitas*, México, SEP-Editorial Santillana, serie Espejo de Urania, 2002.

Lamm, Emma y Elena de Oteyza, *El álgebra es divertida*, México, SEP-Editorial Santillana, serie Espejo de Urania, 2009.

Bibliografía para el alumno (Biblioteca de Aula)

Blum, Wolfgang, *Matemáticas*, México, SEP-Altea, serie Espejo de Urania, 2005.

Jouette, André, *El secreto de los números*, México, SEP-Ediciones Robinbook, serie Espejo de Urania, 2004.

Perelman, Yakov, *Matemáticas recreativas*, México, SEP-Martínez Roca, serie Espejo de Urania, 2003.

Poskitt, Kjartan, *Esa condenada mala suerte*, México, SEP-Abrapalabra Editores, serie Espejo de Urania, 2005.

Régules, Sergio de, et al., *El piropo matemático: de los números a las estrellas*, México, SEP-Lectorum, serie Espejo de Urania, 2003.

Reyes Coix, Luis Gerardo, *Del punto al cuerpo*, México, SEP-Oxford University Press, serie Astrolabio, 2007.

Bibliografía para el profesor

Bautista, Raymundo, Rafael Martínez y Pedro Miramontes, *Las matemáticas y su entorno*, México, Siglo XXI, 2004 (Aprender a aprender).

Block, David, Tatiana Mendoza y Margarita Ramírez, *¿Al doble le toca el doble?: La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*, México, Ediciones SM, 2010.

Chevallard, Yves, Mariana Bosch y Josep Gascón, *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, México, SEP, 1998 (Biblioteca del Normalista).

García, Alfonsa, Alfredo Martínez y Rafael Miñano, *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*, Madrid, Síntesis, 1995.

Mora, David, *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática: Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina*, La Paz, Campo Iris, 2005.

Rico, Luis y José Luis Lupiañez, *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*, Madrid, Alianza, 2008.

Santos, Luz Manuel, *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*, México, Trillas, 2007.

Bibliografía

Bibliografía consultada

Brousseau, Guy, *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publisher, 1997.

Chevallard, Yves, Mariana Bosch y Josep Gascón, *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, México, SEP, 1998 (Biblioteca del Normalista).

Coll, César, *et al.*, "Los profesores y la concepción constructivista", en *El constructivismo en el aula*, Barcelona, Graó, 1998.

_____, *Significado y sentido en el aprendizaje escolar. Reflexiones en torno al concepto de aprendizaje significatvo*, en "Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento", México, Paidós, 2003.

Courant, Richard y Herbert Robbins, *¿Qué es la matemática?*, Madrid, Aguilar, 1979.

Bibliografía electrónica para el profesor

Divulgamat, España, Real Sociedad Matemática Española, centro virtual de divulgación de las matemáticas, disponible en www.divulgamat.net (Consulta: 20 de nooviembre de 2013).

España, Ministerio de Educación, Instituto de Tecnologías Educativas, colección de ligas a páginas con recursos de matemáticas para la enseñanza en la educación secundaria obligatoria de España, disponible en ntic.educacion.es/v5/web/profesores/secundaria/matematicas (Consulta: 20 de noviembre de 2013).

Geometría dinámica, GeoGebra, *Software* de matemática libre para enseñar y aprender, disponible en geogebra.org/webstart/geogebra.html (Consulta: 20 de noviembre de 2013).

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal, disponible en www.redalyc.org (Consulta: 20 de noviembre de 2013).

Créditos iconográficos

RETOS 3 MATEMÁTICOS

Se presentan los contenidos temáticos en situaciones cercanas al contexto de los alumnos para darles mayor sentido.

- La información requerida para desarrollar las actividades está contenida en la lección misma, explicada con un lenguaje sencillo para facilitar a los alumnos la construcción de sus conocimientos.
- Propone múltiples aplicaciones de lo estudiado a fin de favorecer la transferencia de lo aprendido y, por lo tanto, apoyar a los alumnos en su formación matemática:
  - **Sección TIC** en la que se proponen recursos interactivos para que los alumnos practiquen lo aprendido.
  - **Bitácora.** Ejercicios de evaluación del bloque.
  - **Laboratorio de matemáticas.** En esta sección se invita a los alumnos a examinar conceptos y técnicas matemáticas.
  - La sección **En el tintero** presenta nuevas actividades que amplían alguno de los contenidos estudiados en el bloque.

Este libro incluye una amplia variedad de **recursos didácticos** para hacer realidad en las aulas la aplicación del enfoque de enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria. Es por ello que en **www.secundaria-sm.com.mx** podrá registrarse para que le asignemos un código con el que usted accederá a **contenido digital** y a la **guía didáctica** que, además del solucionario del libro, le proporciona **orientaciones didácticas** para el tratamiento de los contenidos, así como **recursos de evaluación** (reactivos tipo PLANEA), **avance programático** editable y herramientas para el **seguimiento del aprendizaje** de sus alumnos.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

163340

ISBN 978-607241001-5

9 786072 410015